Istituzioni di Matematiche I - C. di L. in Chimica
Soluzioni della prova scritta parziale n . 1 dell' 11 . 1 . 07

1.

C.E.

$$\frac{2(x-1)^2}{x^2+2} \le 1 \iff 2(x-1)^2 \le x^2+2 \iff 0 \le x \le 4$$

SEGNO

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \ne 0 \quad , \quad f(0) = 0$$

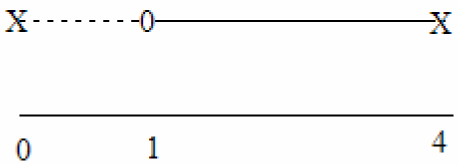
LIMITI NOTEVOLI

Nessun limite notevole da calcolare.

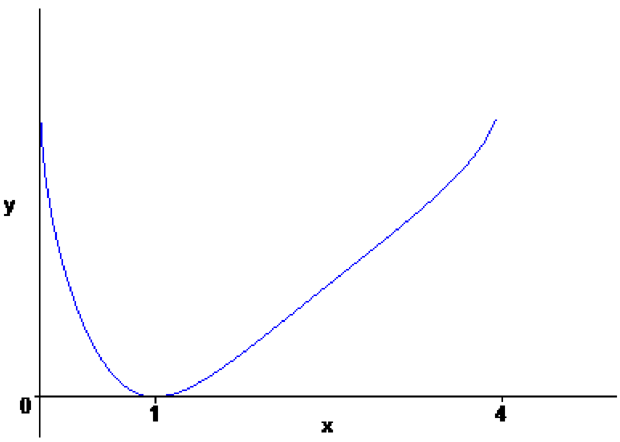
$$f(0) = f(4) = \pi/2$$

DERIVATA

$$f'(x) = \frac{4(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2\sqrt{1-\dfrac{4(x-1)^4}{(x^2+2)^2}}} \quad ; \quad x \ne 0 \ , \ x \ne 4$$



I punti x = 0 , x = 4 sono a tangente verticale.



2.

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log\left(\frac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen }x}\right)}{\text{tg}x}\right).$$

$$\text{Per } x \to 0 \quad \frac{\log\left(\frac{1+\text{sen }x}{1-\text{sen }x}\right)}{\text{tg}x} \sim \frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} \sim \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{x} = \frac{2x}{x(1-x)} \to 2$$

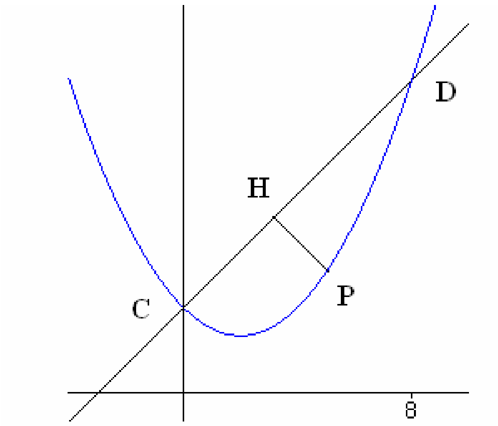
$$f(x) \to e^2 .$$

Per $x \to \pi/2$, si pone $\pi/2 - x = t \to 0^+$.

$$\text{tg } t \ \log\left(\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right) \sim t \ \log\frac{2}{t^2/2} = t\log 4 - 2t\log t \to 0$$

$$f(x) \to 1 .$$

3.



$C = (0, 3)$

retta tangente $y = 3 - x$; retta normale $y = 3 + x$

$D = (8, 11)$

$P = (x,\ x^2/4 - x + 3)$, $0 \le x \le 8$

$CD = 8\sqrt{2}$

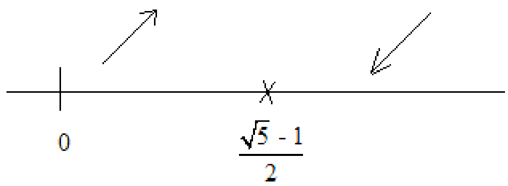
$$PH = \frac{\left|x - x^2/4 + x - 3 + 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|8x - x^2\right|}{4\sqrt{2}} = \frac{8x - x^2}{4\sqrt{2}}$$

L’area è massima per $x = 4$.

4.

La successione è ben definita e positiva.

$$x_{n+1} \ge x_n \iff x_n^2 + x_n - 1 \le 0$$



Rimane da provare che è sempre $x_n < \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ e questo si dimostra per induzione.

Per n = 1 è vera .

Dobbiamo verificare che $x_n < \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x_{n+1} < \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

$$x_{n+1} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 + x_n}{2 + x_n} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (3 - \sqrt{5})\, x_n < 2(\sqrt{5} - 2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n < 2\,\frac{\sqrt{5} - 2}{3 - \sqrt{5}} = 2\,\frac{\sqrt{5} - 2}{3 - \sqrt{5}}\,\frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Dunque, la successione è crescente e limitata superiormente ; pertanto ammette un limite reale $L \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2]$. Poiché $(\sqrt{5} - 1)/2$ è l'unico punto fisso, questo è anche il limite.

5.

$z = 0$ è soluzione per ogni valore di w .

Cerchiamo soluzioni $z \neq 0$: dalla prima equazione si deduce $w = -\bar{z}/z$; sostituiamo nella seconda equazione : $z^2 - \bar{z}^2/z = 0$ ovvero $z^3 = \bar{z}^2$.
L'equazione si risolve passando alla forma esponenziale e si ottiene $r = 1$, $\vartheta = 2k\pi/5$ (con k = 0 , … , 4) .

$z_0 = e^{i0}$ $\qquad$ $w_0 = e^{i\pi}$

$z_1 = e^{i2\pi/5}$ $\qquad$ $w_1 = e^{i\pi/5}$

$z_2 = e^{i4\pi/5}$ $\qquad$ $w_2 = e^{-i3\pi/5}$

$z_3 = e^{i6\pi/5}$ $\qquad$ $w_3 = e^{-i7\pi/5}$

$z_4 = e^{i8\pi/5}$ $\qquad$ $w_4 = e^{-i11\pi/5}$