Soluzioni

1.

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

C.E. $x \neq 0 \;,\; x \neq 1$

Segno sempre positiva

Limiti
per $x \to 0$ $f(x) \to \pm\infty$ asintoto verticale
per $x \to 1$ $f(x) \to e$ discontinuità eliminabile
per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to 1$ asintoto orizzontale

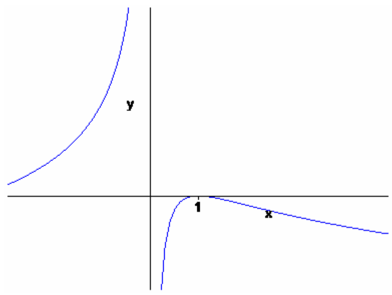
Derivata $$f'(x) = \frac{e^{\frac{\log|x|}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(1 - \frac{1}{x} - \log|x|\right)$$

Studio della funzione $\varphi(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \log|x|$

C.E. $x \neq 0$

Limiti
per $x \to 0^{\pm}$ $\varphi \to \mp\infty$
per $x \to \pm\infty$ $\varphi(x) \to -\infty$

$\varphi(1) = 0$



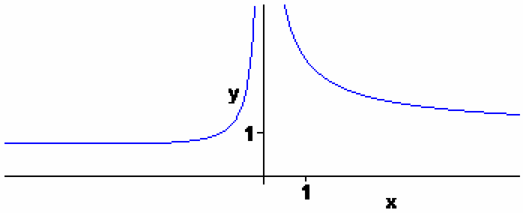
Derivata $$\varphi'(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

Da questo studio si deduce il segno della derivata di f (x) e di conseguenza il grafico della funzione.
Per quanto riguarda il comportamento della derivata nel punto x = 1 di discontinuità eliminabile, si ha

$$f'(x) \,\square\, \frac{e}{(x-1)^2}\,(x - 1 - \log x) \,\square\, \frac{e}{(x-1)^2}\,\frac{(x-1)^2}{2} \to \frac{1}{2}$$

Dunque, eliminata la discontinuità ponendo f (1) = e, la funzione risulta derivabile nel punto.

Grafico della funzione f (x)



2.

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

C.E. $x \neq 0$

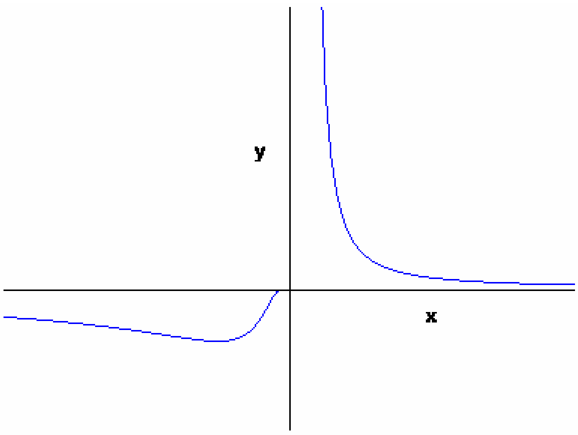
Segno positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$

Limiti per $x \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$
per $x \to 0^-$ $f(x) \to 0$
per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to 0$

Derivate $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}(1+x)$ $f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}(2x^2 + 4x + 1)$

$x = -1$ punto di minimo , minimo $= -1/e$

$x = -1 \pm (1/\sqrt{2})$ punti di flesso

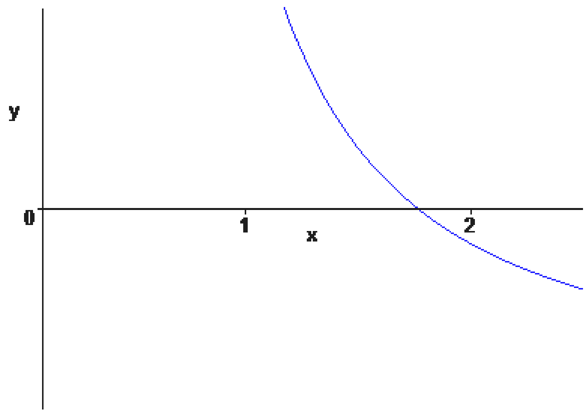


Quindi l'equazione ammette :

nessuna soluzione per $\alpha < -1/e$
una soluzione per $\alpha = -1/e$
due soluzioni per $-1/e < \alpha < 0$

nessuna soluzione per $\alpha = 0$
una soluzione per $\alpha > 0$.

Applichiamo il metodo delle tangenti di Newton alla funzione $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1$ nell'intervallo [1 , 2] :



$x_1 = 1$ $\qquad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\dfrac{e^{1/x_n}}{x_n} - 1}{-\dfrac{e^{1/x_n}}{x_n^{\,3}}\,(x_n+1)}$

$x_2 \sim 1{,}3160$

$x_3 \sim 1{,}6035$

3.

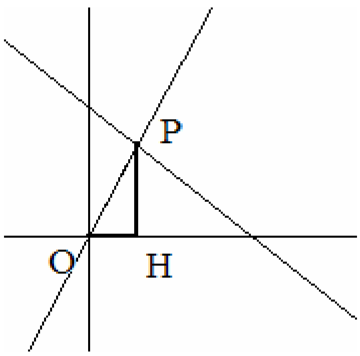
Sviluppando le varie funzioni al quarto ordine , si ottiene :

$\log^2 (1 + x) = (x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o (x^4))^2 \approx x^2 - x^3 + 11\, x^4/12$
$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + x^4/2 \qquad \sqrt{1 + x^4} \approx 1 + x^4/2$
$tg^2 x = (x + x^3/3 + o (x^4))^2 \approx x^2 + 2x^4/3 + o (x^4))^2$
$sen\, x^2 \approx x^2$.

Dunque :

$$f(x) \sim \frac{11x^4/12}{2x^4/3} \to \frac{11}{8}.$$

4.



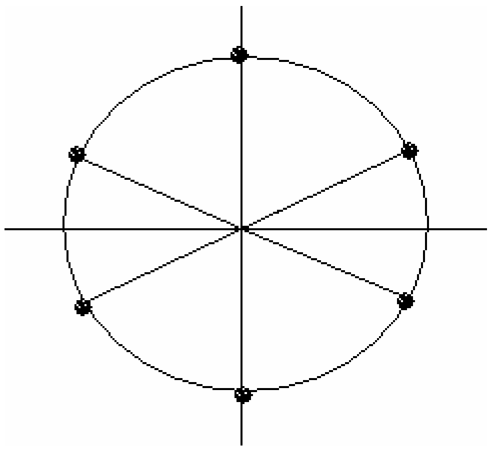
$$P = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{m}{m+1} \right) \qquad H = \left(\frac{1}{m+1}, 0 \right)$$

$$\text{Vol} = \frac{\pi}{3} \frac{m^2}{(m+1)^3}$$ massimo per m = 2

$$\text{Sup} = \pi \frac{m\sqrt{m^2+1}}{(m+1)^2}$$ crescente , non ha massimo

5. ,

z = 0 non è soluzione del sistema; ricaviamo w dalla prima equazione dividendo per z^2 ; sostituendo nella seconda equazione , si ottiene : $\bar{z}^{-3} = -z^3$.
Scriviamo z nella forma $e^{i\theta}$, ottenendo $e^{-3i\theta} = e^{3i\theta + i\pi}$; deve dunque essere $\theta = -\pi/6 + k\pi/3$.



$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad\qquad w = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

i -1

$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

$-\ i$ -1

$\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$.