

Istituzioni di Matematiche I
Prova scritta del 13 settembre 2007

1. (punti 7)

Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x + \operatorname{arctg} \frac{1}{|x+1|}.$$

In particolare, trovare i punti di discontinuità eliminabile e precisare se in questi punti, una volta eliminata la discontinuità, la funzione è derivabile. E' richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2. (punti 3 + 7)

Trovare se esiste finita l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ definita nel precedente problema 1, il suo asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e l'asse delle y :

(i) utilizzando un opportuno criterio di integrabilità

(ii) servendosi del calcolo esplicito dopo aver trovato le primitive della funzione.

3. (punti 6)

Usando la formula di Taylor, calcolare il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{arctg} x}{x^5 \operatorname{arcsen}(\cos x)}.$$

4. (punti 3 + 6)

Risolvere il problema di Cauchy

$$y' + ky = 1, \quad y(0) = 0$$

al variare del parametro reale $k \neq 0$.

Successivamente, indicata con $y_k(x)$ la soluzione, trovare graficamente per quali valori di k risulta

$$|y_k(x)| < 10, \quad \forall x \geq 0.$$