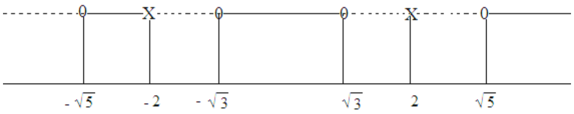
Prova scritta del 7. 02 . 07 - Soluzioni

1.

C.E. $x \neq \pm 2$

SGN



LIM

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to \pm\infty$
senza asintoto

per $x \to -2$ $\quad f(x) = (x+2)\log|x+2| + (x+2)\log|x-2| \to 0$

$x = -2$ discontinuità eliminabile

per $x \to 2$ $\quad f(x) = (x+2)\log|x+2| + (x+2)\log|x-2| \to -\infty$

$x = 2$ asintoto verticale

$f(0) = 4\log 2$

DRV

$$f'(x) = \log\left|x^2 - 4\right| + \frac{2x}{x-2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)^2\,(x+2)}$$

sgn f”

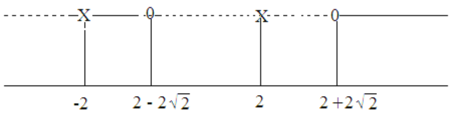
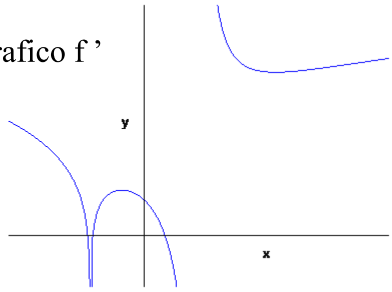
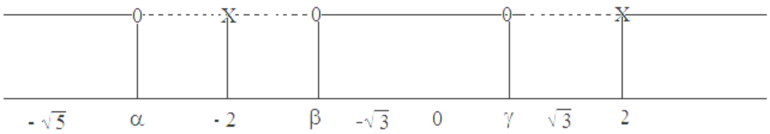


Grafico f ’

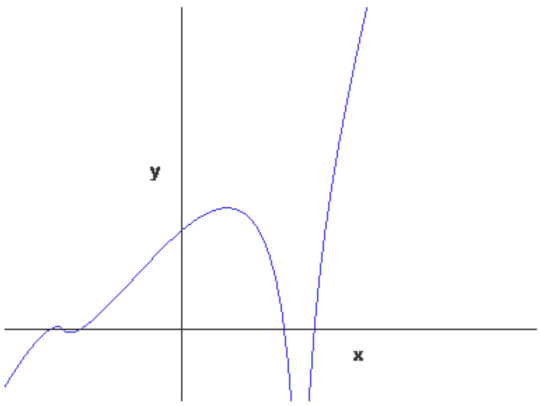


sgn f ’



Il punto $x = -2$ è una discontinuità eliminabile e un punto a tangente verticale

Grafico della funzione



2.

Ponendo prima x = sen t , dx = cos t dt e poi tg t = z , dt = dz / (1 + z^2) , si ottiene :

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_{\sqrt{3}/3}^{+\infty} \frac{dz}{z^2\,(1+z^2)} .$$

Scomponiamo la funzione nella forma $\frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2+1} + \left(\frac{D}{z}\right)'$; essendo una funzione pari, si deduce subito che deve essere A = B = 0 ; i calcoli residui permettono di ottenere C = D = -1.
Una primitiva della funzione è dunque

$$\operatorname{arctg} z - 1/z \ .$$

Il valore dell'integrale è $\sqrt{3} - \pi/3$.
Più semplicemente, ponendo x = cos t :

$$I = \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 t\, dt = \int_0^{\pi/3} (1 + \operatorname{tg}^2 t - 1)\, dt$$

Si trova subito la primitiva tg t – t , con cui calcolare il valore dell'integrale.

3.

Il polinomio caratteristico si scompone nella forma ($k^2 + 1$) (k – 1) ed ha per radici i valori k = ±i e k = 1 ; l'integrale dell'equazione omogenea è dato da y_0 (x) = A e^x + B cos x + C sen x .

Passiamo in campo complesso, prendendo come termine noto dell'equazione la funzione e^{ix} ; cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma A x e ^{ix}. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere A = - 1 / (2 (1 + i)) = (i – 1) / 4 . Ritornando in campo reale, una soluzione particolare dell'equazione completa è Re [x/4 e^x (i – 1) (cos x + i sen x)] = - x/4 e^x (cos x + sen x) .

4.

Se $x > 0$	$a_n \sim x \log n / \sqrt{n} > x / \sqrt{n}$	serie divergente
se $x = 0$	$a_n \sim \log 2 / \sqrt{n}$	serie divergente
se $x < 0$	$a_n \sim n^x / \sqrt{n} = (1/n)^{\frac{1}{2} - x}$	serie convergente per $x < -1/2$ divergente per $-1/2 \le x < 0$

5.

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right)$$

per $x \to 0^+$ $\quad \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx \frac{\log(1 - x^2/2)}{x^3} \approx -\frac{x^2/2}{x^3} = -\frac{1}{2x} \to -\infty$

$$f(x) \to 0$$

per $x \rightarrow \pi/2^-$ si pone $\pi/2 - x = t \rightarrow 0^+$

$$\frac{\log \cos x}{tg^3 x} = tg^3x \ \log \operatorname{sen} t \approx t^3 \log t \rightarrow 0$$

$$f(x) \rightarrow 1$$