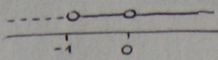
Compito complessivo

1.

C.E. $\mathbb{R}$ LIM per $x \to \pm\infty$ $f(x) \sim x \lg|x| \to \pm\infty$ senza asintoto

SGN



DRV $f'(x) = \lg(1+2|x|) + 2 \operatorname{sgn} x \dfrac{1+x}{1+2|x|}$ $(x \neq 0)$

$$f''(x) = \frac{4(\operatorname{sgn} x + x - 1)}{(1+2|x|)^2}$$

Segno f''

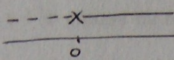


Grafico f'

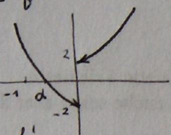
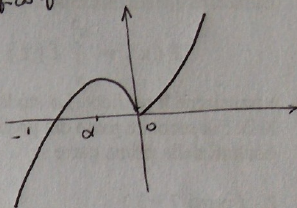
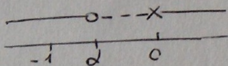


Grafico f



Segno f'



$x = 0$ punto angoloso

2. $\sqrt{4x^2+4x+2} = 2x + t = \dots = \dfrac{-t^2+2t-2}{2(1-t)}$

$x = \dfrac{t^2-2}{4(1-t)}$ $\qquad dx = \dfrac{-t^2+2t-2}{4(1-t)^2}\,dt$

$$y = \int \frac{\frac{t^2-2}{2(1-t)}}{\frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)}} \frac{-t^2+2t-2}{4(1-t)^2}\,dt = \int \frac{t^2-2}{4(t-1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left\{1 + \frac{2t-3}{(t-1)^2}\right\}dt = \frac{1}{4}\int\left\{1 + \frac{2}{t-1} + \left(\frac{1}{t-1}\right)'\right\}dt$$

$$= \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\lg|t-1| + \frac{1}{4(t-1)} + c.$$

3. Dalla seconda eq.: $y = z'' - 1 \Rightarrow y' = z'''$.
Sostituendo nella prima eq.:

$$z''' + z = \operatorname{sen} x.$$

Le condizioni iniziali diventano $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$, $z''(0) = 1$.
Il polinomio caratteristico $R^3 + 1$ ha le radici -1, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$z_0(x) = Ae^{-x} + Be^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + Ce^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x .$$

Scritta l'eq. completa in campo complesso come $w''' + w = e^{ix}$, cerchiamo una soluz. nella forma Ae^{ix}. Sostituendo, si trova che deve essere $A = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$.

Una soluz. particolare dell'eq. in campo reale è dunque

$$\bar{z}(x) = \operatorname{Im}\left[\frac{1+i}{2}(\cos x + i \operatorname{sen} x)\right] = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

In conclusione

$$z(x) = Ae^{-x} + Be^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + Ce^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

Calcolando le derivate prima e seconda, si impongono le condizioni iniziali.

Per quanto riguarda la soluzione y, il suo valore si ottiene dall'eq. $y = z'' - 1$.

4. Se $x > 1$, $a_n \sim \dfrac{n \lg x}{x^{2n}}$.

Criterio radice: $\dfrac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{\lg x}}{x^2} \to \dfrac{1}{x^2} < 1$

La serie converge

Se $0 < x < 1$, $a_n \sim \dfrac{x^n}{x^{2n}} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

che è il termine generale di una serie geometrica divergente

Se $x = 1$ $a_n = \lg 2 \not\to 0$

la serie diverge

5. $\operatorname{arctg} x \sim x - \frac{x^3}{3}$ $\qquad \lg(1+x^2) \sim x^2 - \frac{x^4}{2}$

$\lg(1 + x \operatorname{arctg} x) \cong \lg\left(1 + x^2 - \frac{x^4}{3}\right) \sim \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) - \frac{1}{2}x^4 = x^2 - \frac{5}{6}x^4$

numeratore $\sim x^4/3$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$

$\lg \cos x \cong \lg\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) \sim \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$

denominatore $\sim -x^4/8$

limite $= -8/3$.