Soluzioni

1.

C.E.
$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1$$

Consideriamo l'equazione f (x) = k .

$$\text{arcsen}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = k, \quad k \in [\,-\pi/2\,,\,\pi/2\,] \;\leftrightarrow\; \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \text{sen}\,k \;\leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \text{sen}^2\,k\,, \quad k \in [\,0\,,\,\pi/2\,] \;\leftrightarrow\; x = \frac{\text{sen}^2\,k+1}{\text{sen}^2\,k-1}\,, \quad k \in [\,0\,,\,\pi/2\,)\,.$$

Riassumendo , l'immagine della funzione è $[\,0\,,\,\pi/2\,)$, la funzione inversa è data da $f^{-1}(k)$
$= \dfrac{\text{sen}^2\,k+1}{\text{sen}^2\,k-1}$.

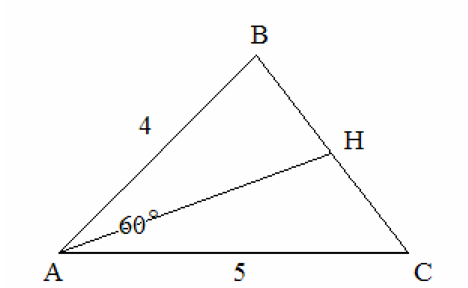
2.

Teorema di Carnot : BC = √ 21

Teorema dei seni : $\dfrac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{4}{\text{sen}\,\gamma}$

sen β = $5\sqrt{7}\,/\,14$ □ 0,945 ; β ≈ 70°54'

sen γ = $2\sqrt{7}\,/\,7$ ⊔ 0,756 ; γ ≈ 49°6'



Per differenza , si trovano l'angolo AHC = 140° 54' e l'angolo AHB = 39°6'.
Con il teorema dei seni si trovano AH e HC e , per differenza , BH.

3.

(a)

$$\text{sen}\,(\,x - \pi/2\,) = -\cos x \quad , \quad \cos\,(\,2\pi/3 + x\,) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,x$$

L'equazione si riscrive nella forma sen x - √ 3 cos x = 0 , cioè tg x = √ 3 , ed ha le soluzioni x = π/3 + kπ .

(b)

La disequazione è definita per $x > 2$. Riscriviamola, cambiando la base del logaritmo a secondo membro.

$$\log_a (x - 1) - \frac{\log_a (x - 2)}{\log_a (1/a)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a (x - 1) + \log_a (x - 2) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

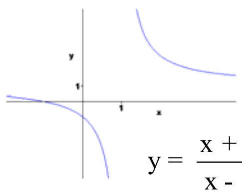
$\log_a (x^2 - 3 x + 2) > 0$.

Se $a > 1$, deve essere $x > 2$, $x^2 - 3x + 2 > 1 \leftrightarrow x > (3 + \sqrt{5}) / 2$

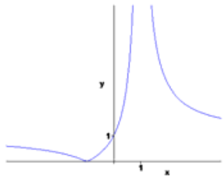
Se $0 < a < 1$, deve essere $x > 2$, $x^2 - 3x + 2 < 1 \leftrightarrow 2 < x < (3 + \sqrt{5}) / 2$.

4.

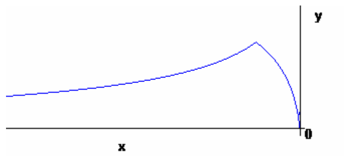
C.E. $\left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1 , x^2 + 2x + 1 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq 0$



$y = \frac{x + 1}{x - 1}$



$y = \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|$

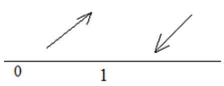


$y = f (x)$

5.

La successione è ben definita perché è sempre $x_n \neq -2$, anzi è sempre $x_n > 0$.

$$x_{n+1} < x_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2 + 2} < x_n \quad \Leftrightarrow \quad ... \quad \Leftrightarrow \quad x_n > 1$$



Proviamo per induzione che è sempre $x_n > 1$.
L'affermazione è vera per $n = 1$.
Supponendola vera per n, deduciamo che è vera per $n+1$:

$$\frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n + 2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad ... \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 > 1$$ che è vera per ipotesi di induzione.

Dunque la successione è decrescente.