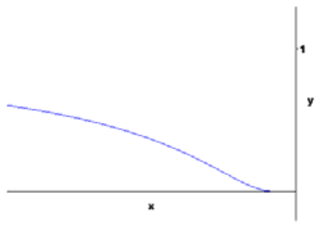
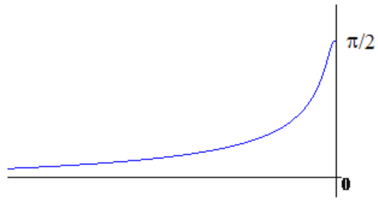
Soluzioni [1]

1.

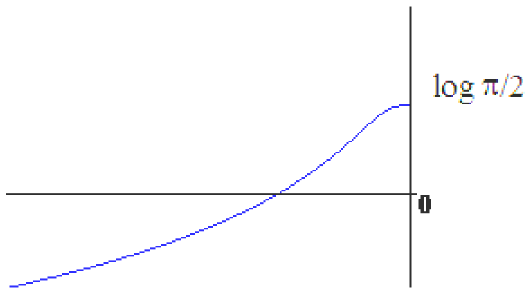
(A) $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq e^{1/x} \leq 1 \\ \arccos e^{1/x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1/x \leq 0 \\ \arccos e^{1/x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 0 \\ 1/x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$

Tracciamo i grafici delle funzioni elementari, limitatamente al dominio $x < 0$.





$y = e^{1/x}$ $y = \arccos e^{1/x}$



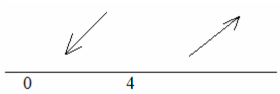
$y = \log \arccos e^{1/x}$

(B) $\begin{cases} 1/x > 0 \\ -1 \leq \log(1/x) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1/e \leq 1/x \leq e \end{cases} \Leftrightarrow 1/e \leq x \leq e$

2.

Poiché è sempre $x^2 - x + 4 > 0$, la successione è ben definita.
Inoltre risulta $x_n > 0$.

$$x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^{\,3}}{x_n^{\,2} - x_n + 4} < x_n \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_n(x_n - 4) < 0$$



Proviamo per induzione che è sempre $x_n < 4$.
L'affermazione è vera per $n = 1$.
Supponendola vera per n , deduciamo che è vera per $n+1$:

$$\frac{x_n^{\ 3}}{x_n^{\ 2} - x_n + 4} < 4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x_n^{\ 2} + 4)(x_n - 4) < 0$$ che è vera per ipotesi di induzione.

Dunque la successione è decrescente.

3.

(A) $x < -2$ oppure $\begin{cases} x \geq -2 \\ \left| x^2 - 1 \right| > x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

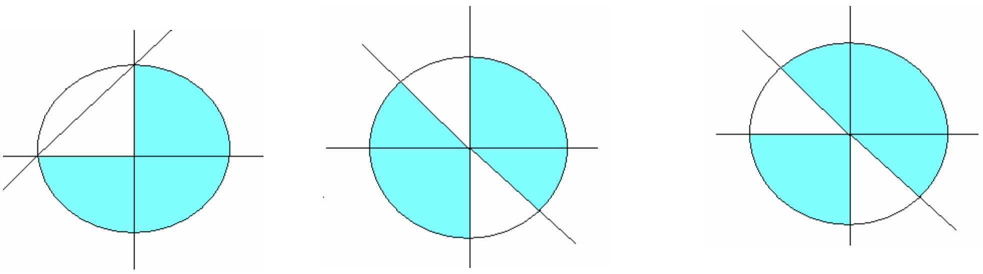
$x < -2$ oppure $\begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 1 > x^2 + 4x + 4 \quad \text{oppure} \quad x^2 - 1 < -x^2 - 4x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x < -2$ oppure $\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x < -5 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5/4$

(B) Il numeratore si riscrive nella forma $1 + \cos x - \text{sen } x$.

$1 + \cos x - \text{sen } x \geq 0$ $\qquad$ $\text{tg } x + 1 > 0$ $\qquad$ rapporto

$1 + X - Y \geq 0$



$x \in (3\pi/4 , \pi) \cup (3\pi/2 , 7\pi/4) + 2k\pi$

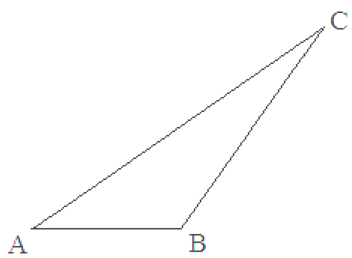
4.

Teorema di Carnot : $AC = \sqrt{7}$

Teorema dei seni : $\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\text{sen } ACB} = \dfrac{2}{\text{sen } CAB}$

$\text{sen } CAB = \sqrt{3/7}$; $ABC \approx 40°54'$

$\text{sen } ACB = \sqrt{3/7}/2$; $ACB \approx 19°16'$



Area = ½ AB BC sen ABC = $\sqrt{3}/2$.

5.

La funzione è definita per $x \in [0, \pi/6) \cup (5\pi/6, 2\pi] + 2k\pi$
La funzione è :

negativa per $x \in (0, \pi/6) \cup (5\pi/6, \pi) + 2k\pi$
positiva per $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$
nulla per $x = 0 + k\pi$.

Restringiamo la funzione all'intervallo $[-\pi/2, \pi/6)$ e qui studiamo l'equazione $f(x) = k$. Con i calcoli consueti si arriva a stabilire che deve essere sen $x = (1 - e^k)/2$. Perché esistano soluzioni accettabili deve essere $-1 \le (1 - e^k)/2 < 1/2$, da cui segue $k \le \log 3$. Dunque l'immagine della funzione è $(-\infty, \log 3]$ e la funzione inversa è data da $f^{-1}(k) = \arcsen((1 - e^k)/2)$.

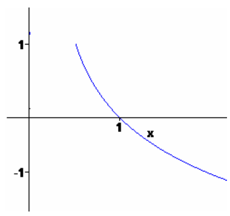
Soluzioni [2]

1.

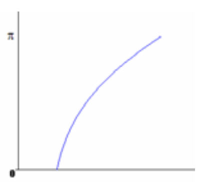
(A) $$\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \le e^{1/x} \le 1 \\ \arccos e^{1/x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1/x \le 0 \\ \arccos e^{1/x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 0 \\ 1/x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

(B) $$\begin{cases} 1/x > 0 \\ -1 \le \log(1/x) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1/e \le 1/x \le e \end{cases} \Leftrightarrow 1/e \le x \le e$$

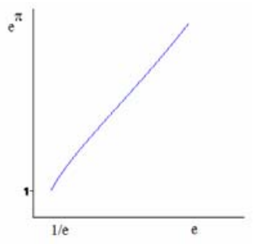
Disegniamo i grafici delle funzioni, limitatamente al dominio $1/e \le x \le e$.



y = log (1 / x)



y = arccos log (1 / x)

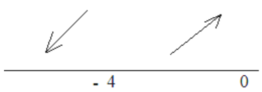


$$y = e^{\arccos \log(1/x)}$$

2.

Poiché è sempre $x^2 - x + 4 > 0$, la successione è ben definita.
Inoltre risulta $x_n < 0$.

$$x_{n+1} > x_n \iff \frac{x_n^3}{x_n^2 - x_n + 4} > x_n \iff \ldots \iff x_n(x_n + 4) < 0$$



Proviamo per induzione che è sempre $x_n > -4$.
L'affermazione è vera per $n = 1$.
Supponendola vera per n , deduciamo che è vera per n+1 :

$\dfrac{x_n^3}{x_n^2 - x_n + 4} > -4 \iff \ldots \iff (x_n^2 + 4)(x_n + 4) > 0$ che è vera per ipotesi di induzione.
Dunque la successione è crescente.

3.

$$(A) \quad x < 2 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ |x^2 - 1| > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \iff$$

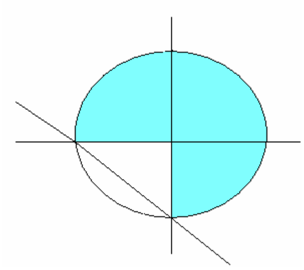
$$x < 2 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 1 > x^2 - 4x + 4 \quad \text{oppure} \quad x^2 - 1 < -x^2 + 4x - 4 \end{cases} \iff$$

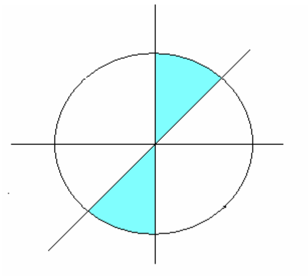
$$x < 2 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x > 5 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in R$$

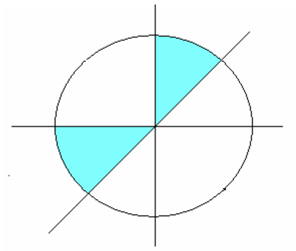
(B) Il numeratore si riscrive nella forma 1 + cos x - sen x .

$1 - \cos x - \text{sen } x \geq 0$ $\qquad$ $\text{tg } x - 1 > 0$ $\qquad$ rapporto

$1 + X + Y \geq 0$



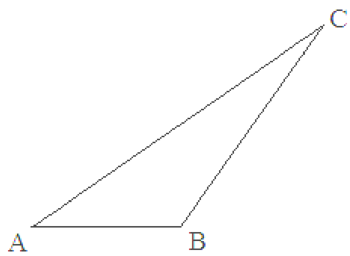




$$x \in (\pi/4 , \pi/2) \cup (\pi , 5\pi/4) + 2k\pi$$

4.

Teorema di Carnot : $AC = \sqrt{7}$



Teorema dei seni : $\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\text{sen } ACB} = \dfrac{2}{\text{sen } CAB}$

$\text{sen } CAB = \sqrt{3/7}$; $ABC \approx 40°54'$

$\text{sen } ACB = \sqrt{3/7}/2$; $ACB \approx 19°16'$

Area = ½ AB BC sen ABC = $\sqrt{3}/2$.

5.

La funzione è definita per $x \in (\pi/3 , 5\pi/3) + 2k\pi$

La funzione è :

negativa per $x \in (\pi/3 , 5\pi/3) + 2k\pi$

positiva per $x \in (\pi/2 , 3\pi/2) + 2k\pi$

nulla per $x = \pi/2 + k\pi$.

Restringiamo la funzione all'intervallo $(\pi/3 , \pi]$ e qui studiamo l'equazione $f(x) = k$.
Con i calcoli consueti si arriva a stabilire che deve essere $\cos x = (1 - e^k)/2$. Perché esistano soluzioni accettabili deve essere $-1 \leq (1 - e^k)/2 < 1/2$, da cui segue $k \leq \log 3$.
Dunque l'immagine della funzione è $(-\infty , \log 3]$ e la funzione inversa è data da $f^{-1}(k) = \arccos((1 - e^k)/2)$.