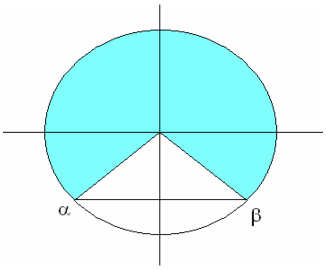
Soluzioni della prova scritta del 7. 2. 06

1.

C.E. R ; poiché la funzione è 2π – periodica , possiamo limitarci a studiarla in $[0 , 2 \pi]$

SEGNO $f (x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \geq (1 - \sqrt{3}) / 2$

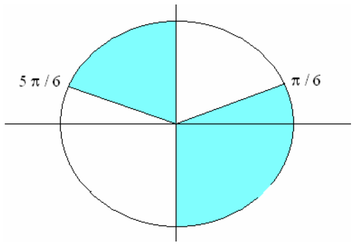


$\alpha = \pi - \operatorname{arcsen} (1 - \sqrt{3}) / 2$

$\beta = 2\pi + \operatorname{arcsen} (1 - \sqrt{3}) / 2$

DERIVATA $f ' (x) = 2 \cos x (1 – 2 \operatorname{sen} x)$

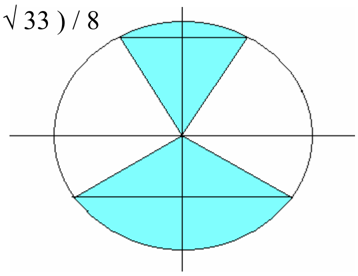
segno derivata



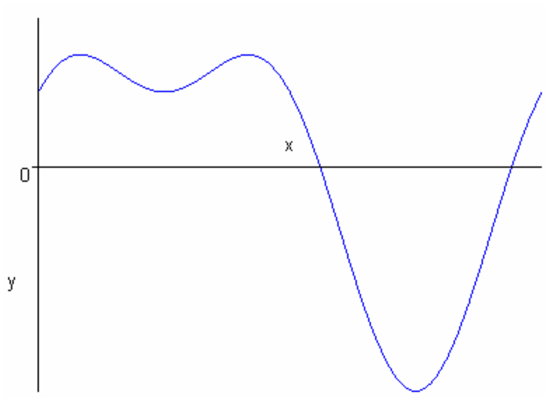
$f '' (x) = 2 (4 \operatorname{sen}^2 x – \operatorname{sen} x – 2) \geq 0$

per $\operatorname{sen} x \leq (1 - \sqrt{33}) / 8$ opp. $\operatorname{sen} x \geq (1 + \sqrt{33}) / 8$

segno derivata seconda



GRAFICO



2.

Cominciamo con lo studiare l’equazione omogenea . Il polinomio caratteristico associato $k^3 + k$ ha come radici $0 , \pm i$, a cui corrispondono le funzioni 1 , cos x , sen x come base dello spazio delle soluzioni. Per trovare una soluzione particolare dell’equazione completa , passiamo in campo complesso. Il termine noto diventa la funzione $4 x \exp (i x)$; poiché i è radice del polinomio caratteristico , cerchiamo una

soluzione della forma $x (A x + B) \exp (i x)$. Sostituendo la funzione nell'equazione e imponendo che questa sia risolta, si trova che deve essere $-4A = 4$, $6iA - 2B = 0$, cioè $A = -1$, $B = -3i$. Della soluzione complessa $-x (x + 3i) (\cos x + i \operatorname{sen} x)$ così individuata prendiamo la parte immaginaria, cioè la funzione $-x (3 \cos x + x \operatorname{sen} x)$.
In conclusione, le soluzioni dell'equazione sono le funzioni :

$$y(x) = A + B \cos x + C \operatorname{sen} x - x (3 \cos x + x \operatorname{sen} x) .$$

3.

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^4) , \quad \operatorname{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$$

$$\cos x^2 = 1 - x^4/2 + o(x^4) , \quad \cos^2 x = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) \approx \frac{x^4}{3x^{\alpha+2}} = \frac{x^{2-\alpha}}{3} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 1/3 & \text{se } \alpha = 2 \end{cases}$$

4.

(i) La funzione è infinita per $x \to \pi/4$; per studiarne la parte principale, per prima cosa osserviamo che $f(x) \approx 1/[2(1 - \operatorname{tg} x)]$. Posto $t = x - \pi/4 \to 0$, si ottiene $\operatorname{tg} x = (1 + \operatorname{tg} t)/(1 - \operatorname{tg} t)$ e dunque $f(t) = (\operatorname{tg} t - 1)/(4 \operatorname{tg} t) \approx -1/(4t)$. Poiché la funzione risulta essere un infinito di ordine 1 per $x \to \pi/4$, l'integrale non esiste.

(ii) Posto $t = \operatorname{tg} x$ e poi $z = t^2$, si ottiene $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt$ e poi $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{(1-z)(1+z)}$.

Con il metodo di Hermite si trova che una primitiva è data da $\displaystyle\frac{1}{2} \log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$. Poiché questa funzione diverge per $z \to 1$, l'integrale non esiste.

5.

$\displaystyle |a_n| = \frac{2^n |x|^n}{n^2+1} \approx \frac{2^n |x|^n}{n^2}$. Applicando il teorema della radice, si trova il limite $2|x|$; dunque :

se $|x| < 1/2$ la serie converge (assolutamente)

se $|x| > 1/2$ la serie non converge

se $x = 1/2$ $\quad \displaystyle a_n = \frac{1}{n^2+1} \approx \frac{1}{n^2}$ e la serie converge

se $x = -1/2$ $\quad \displaystyle a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ e la serie converge per il criterio di Leibniz.