Soluzioni della prova scritta del 17.01.06

1.

C.E. $x \neq 0$

LIMITI

per $x \to 0$ $\quad f(x) \to -\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to \pm\infty$

la retta y = x è asintoto ; la funzione si avvicina all'asintoto da sopra

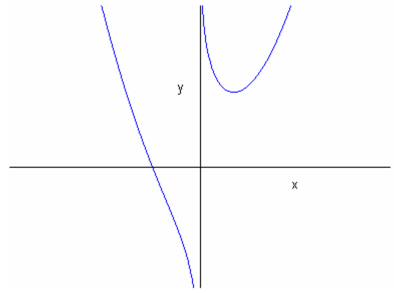
DERIVATA

$$f'(x) = \frac{x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)}{x^2}$$

Per ottenere il segno della derivata , occorre ricavare graficamente quello della funzione al numeratore.

$$\varphi(x) = x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)$$

$$\varphi'(x) = \frac{2x^2 - \operatorname{sgn} x}{x}$$



segno derivata

————0---------X————

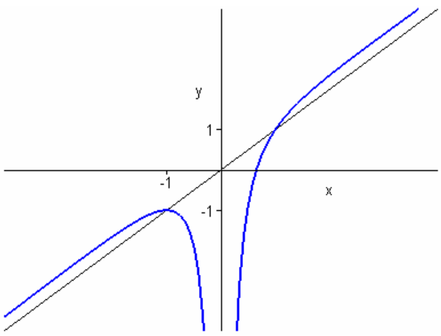
-1 0

$$f''(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(2\log|x| - 3)}{x^3}$$

segno derivata seconda

————0---------X---------0————

$-e^{3/2}$ 0 $e^{3/2}$



2.

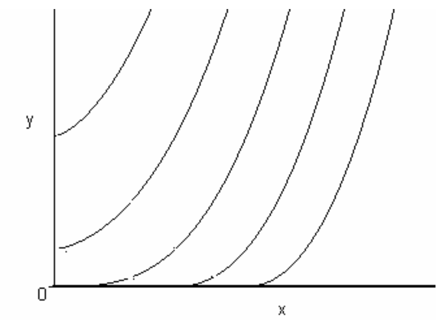
L'equazione è definita per $x \geq 0$ (richiesta del problema) e per $y \geq 0$.
$y = 0$ è soluzione costante.
Per $y > 0$, separiamo le variabili ed integriamo :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{x_0}^{y} \sqrt{s}\ ds \iff 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0} = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}x_0^{3/2} \iff \sqrt{y} = \frac{x^{3/2}+c}{3}$$

Esplicitando la y , si trova

$$y = \frac{\left(x^{3/2}+c\right)^2}{9}$$

sotto la condizione $x^{3/2}+c > 0$; dunque se $c \geq 0$ deve essere $x > 0$ (tenendo conto di quanto richiesto dal problema) , se $c < 0$ deve essere $x > c^{2/3}$.
Il problema con la condizione iniziale $y (0) = \alpha$ ha una sola soluzione se $\alpha > 0$, infinite soluzioni se $\alpha = 0$, nessuna soluzione se $\alpha < 0$.



3.

$\operatorname{sen} x \sim x - x^3/6$, $\operatorname{tg} x \sim x + x^3/3$, $2^x \sim 1 + x \log 2$, $3^x \sim 1 + x \log 3$
$\sqrt{1-x^2} \sim 1 - x^2/2 - x^4/8$, $\cos x \sim 1 - x^2/2 + x^4/24$.

Sostituendo , il limite diventa :

$$\frac{-\dfrac{x^3}{2}\ (\log 2 - \log 3\ )\ x}{-\dfrac{x^4}{6}} \to 3\ \log\ (2/3).$$

4.

Per $x \to +\infty$ $f (x) \approx \dfrac{\log x}{x^2} \leq \dfrac{x^\alpha}{x^2} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$. Prendendo $\alpha < 1$, il criterio del confronto permette di concludere con l'esistenza dell'integrale.

5.

Ponendo t = tg x , l'integrale diventa $\int \frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)}\,dt$.

Il metodo di Hermite permette di scomporre la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t} - \frac{1}{4}\,\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

e dunque , integrando , si trova

$$-\frac{1}{2}\log(1-t) - \frac{1}{4}\log(1+t^2) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t + c \; .$$

Ritornando alla variabile x :

$$-\frac{1}{2}\log(1-\mathrm{tg}\,x) - \frac{1}{4}\log(1+\mathrm{tg}^2\,x) - \frac{1}{2}\,x + c \, .$$