Introduzione alla Matematica – C. di L. in Chimica Molecolare
Soluzioni della prova scritta del 12. 04. 06

1.

C.E. $\qquad x \neq \pm \pi / 3$

SEGNO

————0-------X——————X-------0———

$- \pi \quad -\pi/2 \quad - \pi/3 \qquad\qquad \pi/3 \quad \pi/2 \quad \pi$

La funzione è pari e dunque non è invertibile nel suo C.E.
Per rispondere alle altre domande , consideriamo l'equazione $f (x) = \alpha$, ottenendo successivamente

$$\cos x = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \ .$$

Perché abbia senso l'ultimo passaggio , deve essere $\left| \alpha / (2\alpha - 1) \right| \leq 1$, ovvero elevando al quadrato

$$\begin{cases} \alpha \neq 1/2 \\ 3\alpha^2 - 4\alpha + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq 1/3 \text{ oppure } \alpha \geq 1 \ .$$

I valori trovati per x sono entrambi accettabili in quanto

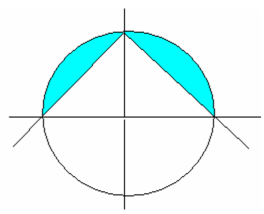
$$\arccos \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \neq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha \neq 2\alpha - 1 \ .$$

In conclusione , l'immagine è $(-\infty , 1/3] \cup [1 , +\infty)$; la restrizione della funzione a $[0 , \pi]$ è invertibile e l'inversa è data da $f^{-1} (\alpha) = \arccos \dfrac{\alpha}{2\alpha - 1}$.

2.

(i) Poniamo $X = \cos x$, $Y = \operatorname{sen} x$:

$$\begin{cases} Y + |X| \geq 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



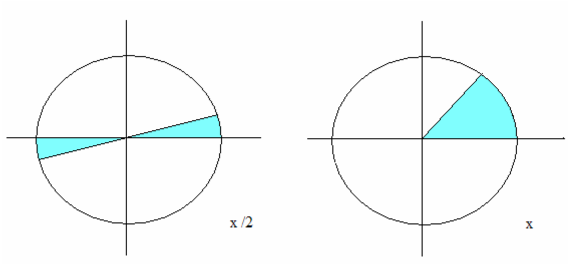
$$2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

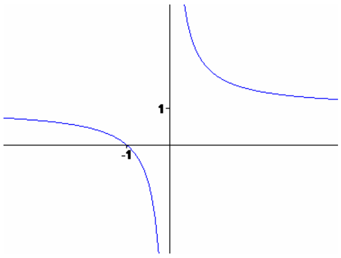
(ii) Poniamo $t = \operatorname{tg} (x / 2)$ e utilizziamo le formule parametriche :

$$3t^2 \leq \sqrt{3}\, t \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{3} / 3 \Leftrightarrow$$

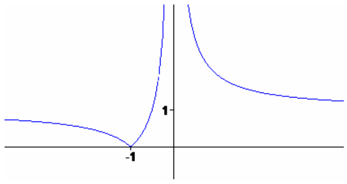
$$k\pi \leq x/2 \leq \pi/6 + k\pi \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi/3 + 2k\pi$$

3.

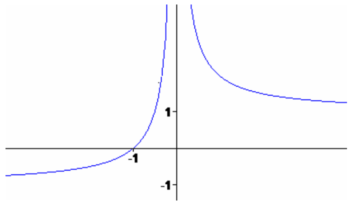




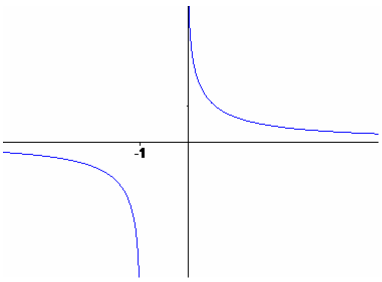
$y = \frac{x+1}{x}$



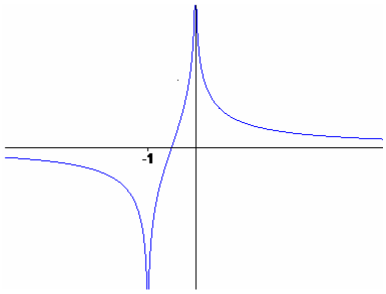
$y = \left|\frac{x+1}{x}\right|$



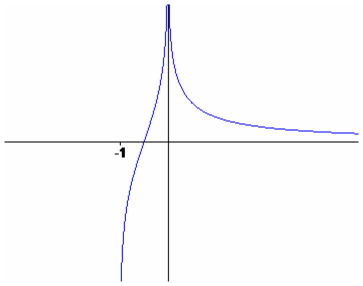
$y = \frac{x+1}{|x|}$



$y = \log \frac{x+1}{x}$

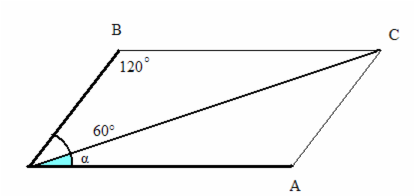


$y = \log \left|\frac{x+1}{x}\right|$



$y = \log \frac{x+1}{|x|}$

4.



Teorema di Carnot al triangolo OAC :

$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2\,|A|\,|B| \cos 120^0 = 7$$

Teorema di Carnot al triangolo OBC :

$$|B|^2 = |A|^2 + |C|^2 - 2\,|A|\,|C| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

5.

L'affermazione è banalmente vera per n = 1 (6 è divisibile per 6) .
Supponiamo l'asserto vero per n e deduciamolo per n+1 :

$$n^3 + 5n \text{ divisibile per } 6 \Rightarrow (n+1)^3 + 5(n+1) \text{ divisibile per } 6 .$$

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = \ldots = (n^3 + 5n) + 3[n(n+1) + 2] .$$

Per ipotesi induttiva ($n^3 + 5n$) è divisibile per 6 ; rimane da provare che n (n + 1) + 2 è divisibile per 2 , cioè che lo è n (n + 1) e questo è vero perché n oppure n + 1 è pari.