Soluzioni della prova scritta parziale n.1 del 10 . 12 . 2004

1.

C.E. $(0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\log\frac{|x-1|}{x} = \alpha \iff \frac{|x-1|}{x} = e^{\alpha} \iff (1-e^{2\alpha})x^2 - 2x + 1 = 0$$

Per $\alpha = 0$, $x = 1/2$.

Per $\alpha \neq 0$, $x = \dfrac{1 \pm e^{\alpha}}{1-e^{2\alpha}} = \begin{matrix} 1/(1-e^{\alpha}) \\ 1/(1+e^{\alpha}) \end{matrix}$

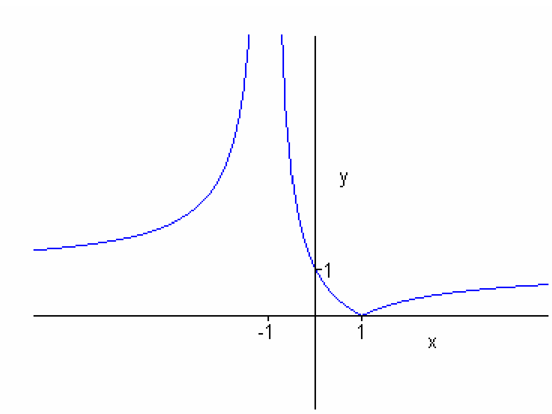
$1/(1-e^{\alpha}) > 1$ per $\alpha < 0$	$1/(1-e^{\alpha}) > 1$ per $\alpha < 0$
$1/(1-e^{\alpha}) \in (0,1)$ mai	$1/(1-e^{\alpha}) \in (0,1)$ mai

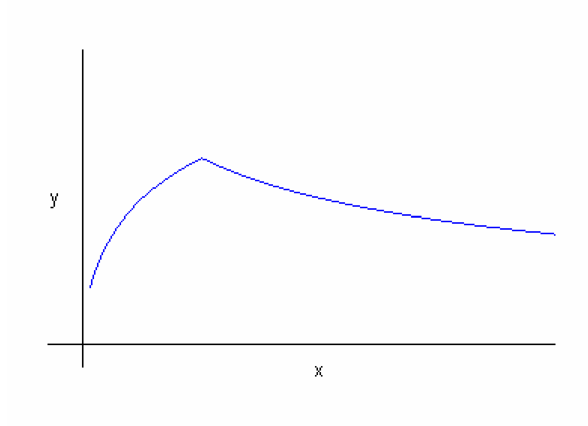
Dunque Im f = R e la funzione non è iniettiva .

La restrizione a $(0,1)$ è invertibile e $f^{-1}(\alpha) = 1/(1+e^{\alpha})$ per $\alpha \in R$

La restrizione a $(1,+\infty)$ è invertibile e $f^{-1}(\alpha) = 1/(1-e^{\alpha})$ per $\alpha < 0$

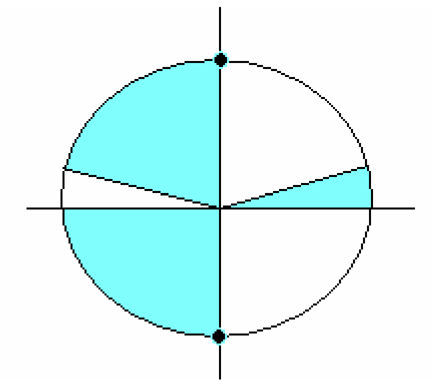
2.



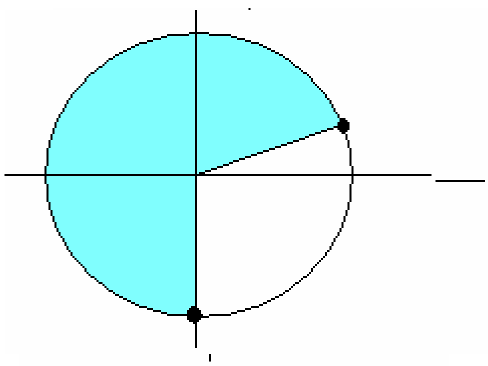


3. (a) $\cos 2x - \operatorname{sen} x = -2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 1 \geq 0 \iff -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1/2$

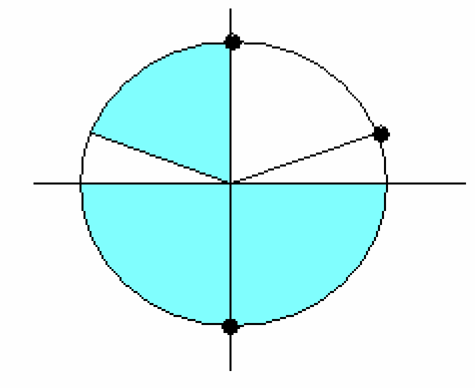
segno numeratore



segno denominatore



Segno rapporto

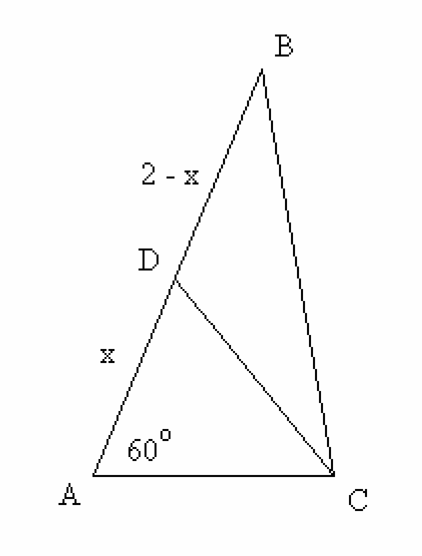


$2k\pi \le x < \pi/2 + 2k\pi \quad , \quad x \ne \pi/6 + 2k\pi$

$5\pi/6 + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$.

(b) $\log_2(4 - \log_{1/2} x) \le -2 \iff \begin{cases} x > 0 \\ 15/4 \le \log_{1/2} x < 4 \end{cases} \iff 1/16 < x \le (1/2)^{15/4}$

4.



$BD = 2 - x$ e dunque $BD^2 = (2 - x)^2$

Applicando il teorema di carnet , si ottiene :

$BC^2 = 5 - 4\cos 60° = 3$

$CD^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60° = x^2 - x + 1$

La condizione espressa dal problema diventa :

$2x^2 - 5x + 3 = 0$, con $0 \le x \le 2$.

Le soluzioni sono $x = 1$, $x = 3/2$

5. Per $n = 1$ la maggiorazione è falsa , per $n = 2$ è vera .

   Proviamo che è induttiva :

   $2^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n < 4(2^n + 3^n) \le 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$.