Matematica Finanziaria
a.a. 2018-2019
Prof. Alberto Cambini

Indice

1 Elementi di Matematica Finanziaria 5

1.1 Regime di capitalizzazione semplice 8

1.1.1 Operazione di capitalizzazione 8

1.1.2 Tassi equivalenti 12

1.1.3 Attualizzazione 13

1.1.4 Esercizi sulla capitalizzazione semplice 16

1.2 Regime di capitalizzazione composta 19

1.2.1 Tassi frazionari equivalenti 24

1.2.2 Esercizi sulla capitalizzazione composta 25

1.2.3 Valore attuale e montante di più capitali 28

1.2.4 Esercizi sul valore attuale e montante di più capitali 31

1.2.5 Valore attuale e montante di rate uguali 33

1.2.6 Esercizi 36

1.2.7 Lo sconto commerciale 37

1.2.8 Esercizi sullo sconto commerciale 38

1.3 Rendite 39

1.3.1 Leasing 52

1.3.2 Esercizi sulle rendite 54

1.4 Criteri di scelta tra operazioni finanziarie 59
1.4.1 Il rendimento economico attualizzato 59
1.4.2 Esercizi 62
1.4.3 Il tasso interno di rendimento (TIR) 64
1.4.4 Esercizi 66
1.4.5 Il TAN e il TAEG 68
1.4.6 Esercizi 71
1.5 Ammortamenti 74
1.5.1 Generalità 74
1.5.2 Ammortamento francese (a rata costante) 78
1.5.3 Ammortamento progressivo indicizzato 80
1.5.4 Ammortamento a quote costanti di capitale 87
1.5.5 Esercizi sugli ammortamenti 88
1.6 Costituzione di capitali 96
1.6.1 Costituzione di un capitale con rate posticipate 96
1.6.2 Il piano di costituzione 102
1.6.3 Esercizi 105
1.6.4 Costituzione di un capitale con rate anticipate 110
1.6.5 Esercizi 119

Capitolo 1

Elementi di Matematica Finanziaria

Le due tipiche operazioni finanziarie di base vanno sotto il nome di: capitalizzazione e attualizzazione.

• **Operazione di capitalizzazione**

Investiamo oggi (tempo iniziale $t = 0$) una somma (detta capitale) C in cambio di una somma M (detta montante) al termine di un tempo di durata $T > 0$.

caso tipico: Si depositano in Banca 1000 euro che vengono prelevate dopo due anni, unitamente agli interessi dovuti.

La differenza $M - C$ è detta **interesse** e denotata con I.

Si ha $M = C + I$, da cui $I = M - C$.

• **Operazione di attualizzazione**

E' una operazione inversa o duale della precedente: Si chiede oggi una somma A (detta valore attuale oppure somma scontata) in cambio di una somma futura N esigibile all'epoca $T > 0$.

caso tipico: avendo bisogno di denaro si riscatta oggi un titolo di 2000 euro

scadente tra 2 anni in cambio di una somma immediata.
La differenza $N - A$ è detta **sconto** e denotata con S; si ha $N - A = S$ da cui $A = N - S$.
Un regime di capitalizzazione è una legge o regola di calcolo che permette di determinare la relazione intercedente tra C, M, I in una operazione di capitalizzazione e tra A, N, I in una operazione di attualizzazione.
Analizzeremo i due casi più aderenti alla vita reale:
calcolo degli interessi in *regime di capitalizzazione semplice*;
calcolo degli interessi in *regime di capitalizzazione composta.*
Introduciamo dapprima il significato di tasso di interesse e alcune notazioni di uso comune.

• **Tassi di interesse**

Le seguenti affermazioni fanno parte del linguaggio comune: "la Banca pratica un tasso di interesse annuo del 2% per i depositi e il tasso di interesse annuo del 6% per i prestiti".
Sappiamo cosa significa:
• per ogni 100 euro depositati si riceverà, al termine del periodo di un anno, un compenso (interesse) di 2 euro o, equivalentemente, per ogni euro depositato si riceverà, dopo un anno, 0.02 euro di interessi;
• per ogni euro preso in prestito si pagherà alla Banca, al termine del periodo di un anno, un compenso (interesse) di 0.06 euro o, equivalentemente, per ogni 100 euro ricevuti si pagherà, al termine di un anno, 6 euro di interessi.
Con riferimento a depositi (lasciando allo studente l'analoga interpretazione nel caso di prestiti):

- tasso del 5% semestrale significa che per ogni lira depositata si riceverà, al termine del periodo di un semestre, un compenso (interesse) di 0.05 euro o, equivalentemente, per ogni 100 euro depositati si riceverà, dopo un semestre, 5 euro di interessi;

- tasso del 4% trimestrale significa che per ogni lira depositata si riceverà, al termine del periodo di un trimestre, un compenso (interesse) di 0.04 euro o, equivalentemente, per ogni 100 euro depositati si riceverà, dopo un trimestre, 4 euro di interessi, e così via.

• **Notazioni**

Il tasso di interesse annuo è denotato con i;

Il tasso di interesse semestrale è denotato con i_2 in quanto un anno corrisponde a due semestri;

Il tasso di interesse quadrimestrale à denotato con i_3 in quanto un anno corrisponde a tre quadrimestri;

Il tasso di interesse trimestrale à denotato con i_4 in quanto un anno corrisponde a quattro trimestri;

Il tasso di interesse bimestrale è denotato con i_6 in quanto un anno corrisponde a sei bimestri;

Il tasso di interesse mensile è denotato con i_{12} in quanto un anno corrisponde a dodici mesi.

Con riferimento all'anno, i tassi $i_2, i_3, i_4, i_6, i_{12}$ sono detti **tassi di interesse frazionati**.

In generale con la notazione i_k, k **indica il numero di periodi in un anno**, mentre $\frac{12}{k}$ mesi indica il periodo di riferimento scelto.

1.1 Regime di capitalizzazione semplice

1.1.1 Operazione di capitalizzazione

$C - M$

In regime di capitalizzazione semplice, gli interessi I sulla somma investita C si calcolano nel seguente modo:

a) viene fissato un tasso di interesse i^* relativo ad periodo unitario scelto (annuo, semestrale, trimestrale ...);

b) si esprime il tempo di impiego in periodi o frazione di periodi rispetto al periodo unitario scelto, sia esso t_{i^*}.

Ad esempio, se il periodo è trimestrale, 2 anni e 4 mesi corrispondono al tempo $9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$ trimestri ;

c) si applica la formula $I = Ci^*t_{i^*}$.

In tale regime, che è attuato usualmente dalle banche per periodi di tempo inferiori all'anno, gli interessi vengono quindi calcolati in modo proporzionale sia al capitale impiegato sia al tempo di impiego, secondo una costante di proporzionalità i^* che rappresenta l'interesse percepito al termine del periodo unitario prefissato per avere investito un capitale unitario.

Se il periodo prefissato è un anno, $i^* = i$; se il periodo è un semestre $i^* = i_2$ e così via.

Per quanto riguarda il montante M si ha:

$M = C + I = C + Ci^*t_{i^*} = C(1 + i^*t_{i^*})$.

In particolare:

• se ci si riferisce ad un periodo unitario di un anno, si ha

$$M = C(1 + it), \tag{1.1.1}$$

ove t= **periodo di tempo espresso in multipli o frazioni di anni**.

Spesso, quando t è composto da mesi e giorni si ha

$$t = \frac{\textit{numero giorni}}{365}\ (\textit{anno civile});\ t = \frac{\textit{numero giorni}}{360}\ (\textit{anno commerciale}) \tag{1.1.2}$$

Dalla (1.1.1) si ricavano le formule inverse

$$C = \frac{M}{1+it}, \quad t = \frac{M-C}{Ci}, \quad i = \frac{M-C}{Ct}. \tag{1.1.3}$$

Osservazione 1.1.1 Se ci si riferisce ad un periodo unitario di un quadrimestre, $M = C(1+i_3 t)$, t= periodo di tempo espresso in multipli o frazioni di quadrimestri, e così via.

In generale, rispetto ai tassi di interesse frazionati si ha:

$$M = C(1 + i_k t_k) \tag{1.1.4}$$

Il fattore $1 + it$ oppure $1 + i_k t_k$ è detto **fattore di capitalizzazione semplice**.

• **Esempi sul calcolo del montante**

Esempio 1.1.1 Si deposita la somma di 5400 euro al tasso di interesse trimestrale del 2% per 8 mesi. Determinare il montante e l'interesse.

• Essendo l'interesse trimestrale, la formula del montante diviene $M = C(1+i_4 t_4)$ ove $i_4 = 2\%$ e t_4 è il tempo computato in multipli o frazioni di trimestri. Nel nostro caso 8 mesi corrispondono a un tempo $t_4 = \frac{8}{3}$. Conseguentemente, si ha $M = 5400(1 + 0.02 \cdot \frac{8}{3}) = 5688$ Euro.

Essendo poi $I = M - C$, si ha $I = 5688 - 5400 = 288$ Euro.

Esempio 1.1.2 Si deposita la somma di 7300 euro al tasso di interesse annuo del 6,5% dal 5 Marzo al 25 Giugno. Determinare il montante e l'interesse.

• Si ha $M = C(1 + it)$; il tempo viene computato in anni o frazioni di anno in base all'anno civile:
$\dfrac{numero\ giorni}{365} = \dfrac{26 + 30 + 31 + 25}{365} = \dfrac{112}{365} = 0,3068.$
Risulta $M = 7300(1 + \cdot 0.065 \cdot 0.3068) = 7445,60$ Euro, da cui
$I = M - C = 7445,6 - 7300 = 145,60$ Euro.

Esempio 1.1.3 Si deposita la somma di 7300 euro al tasso di interesse annuo del 6,5% . Determinare il montante e l'interesse dopo 7 mesi e 24 giorni.

• Si ha $I = Cit$; poichè non sono specificati i mesi, il tempo viene computato in base all'anno commerciale:
$\dfrac{numero\ giorni}{360} = \dfrac{7 \cdot 30 + 24}{360} = \dfrac{234}{360} = 0,65.$
Risulta $M = 7300(1 + \cdot 0,065 \cdot 0,65) = 7608,425$ Eur, da cui
$I = M - C = 7608,425 - 7300 = 308,425$ euro.

• **Calcolo del Capitale**

Esempio 1.1.4 Un capitale, investito al tasso di interesse annuo semplice del 2,5% per tre anni, ha generato un montante di 3225 Euro.
Determinare il capitale iniziale.
Dalla relazione $M = C(1 + it)$, si ha $C = \dfrac{M}{1 + it}$.
Essendo $i = 0.025,\ t = 3$, si ottiene $C = \dfrac{3225}{1 + 0.025 \cdot 3} = \dfrac{3225}{1 + 0.075} = 3000$ Euro.

Esempio 1.1.5 Un capitale, investito al tasso di interesse semestrale semplice del 1,5% per due anni 3 mesi e 15 giorni, ha generato un montante di 10000 Euro.
Determinare il capitale iniziale.
Per potere applicare la formula $C = \dfrac{M}{1 + i_2 t_2}$, occorre calcolare preliminarmente il tempo t_2 espresso in semestri. A tale scopo osserviamo che:

- due anni equivalgono a 4 semestri;
- 3 mesi equivalgono a $\frac{3}{6} = 0.5$ semestri;
- 15 mesi equivalgono a $\frac{15}{180} = 0.083333$ semestri.

Conseguentemente $t_2 = 4.583333$ semestri.
Si ha $C = \frac{10000}{1 + 0.015 \cdot 4.583333} = \frac{10000}{1 + 0.06845} = 9359.35$ Euro-

• **Calcolo del tasso di interesse**

Esempio 1.1.6 Un capitale di 20000 Euro investito per 5 anni in regime di interesse semplice, ha prodotto un montante di 25000 Euro.
Determinare il tasso di interesse annuo applicato.
Dalla relazione $M = C(1+it)$ si ha $M = C+Cit$, da cui $25000 = 20000+20000it$, $25000 - 20000 = 20000it$, e infine
$i = \frac{5000}{20000 \cdot 5} = 0.05.$
Si osservi che in generale vale la relazione
$i = \frac{M - C}{C \cdot t}$

Esempio 1.1.7 Un capitale di 35750 Euro, investito per 3 anni, 4 mesi e 25 giorni, in regime di interesse semplice, ha prodotto un montante di 42379.89 Euro.
Determinare il tasso di interesse annuo applicato.
Dalla relazione $i = \frac{M - C}{C \cdot t}$, tenuto conto che 4 mesi e 25 giorni equivalgono a $\frac{4}{12} + \frac{25}{360} = 0.40278$ anni, si ha
$i = \frac{42379.89 - 35750}{35750 \cdot 3.40278} = \frac{6629.89}{121649.39} = 5.45\%.$

• **Calcolo del tempo**

Esempio 1.1.8 Un capitale di 15000 Euro, investito al tasso di interesse semplice annuo del 4.25%, ha prodotto un montante di 17550 Euro.

Determinare per quanto tempo è stato investito il capitale.

Dalla relazione $M = C(1 + it)$ si ha :
$t = \dfrac{M - C}{C \cdot i}$.
Risulta $t = \dfrac{17550 - 15000}{15000 \cdot 0.0425} = \dfrac{2550}{637.5} = 4$ anni.

Esempio 1.1.9 Un capitale di 60000 Euro, investito al tasso di interesse semplice annuo del 2.7%, ha prodotto un montante di 70285 Euro.

Determinare per quanto tempo è stato investito il capitale.

Essendo $t = \dfrac{M - C}{C \cdot i}$, si ha
$t = \dfrac{70285 - 60000}{60000 \cdot 0.027} = \dfrac{10285}{1620} = 6.3487654$ anni, ovvero
6 anni, $0.3487654 \cdot 12 = 4,18518$ mesi ovvero 4 mesi e $0,18518 \cdot 30 = 5$ giorni.

1.1.2 Tassi equivalenti

Due tassi di interesse si dicono equivalenti se applicati ad uno stesso capitale producono lo stesso montante in una qualsiasi epoca temporale T.

Applicando ad un capitale unitario il tasso di interesse i_k per un anno, si perviene ad un montante $M = 1 + i_k \cdot k$; applicando allo stesso capitale unitario il tasso di interesse annuo i per un anno, si perviene ad un montante $M = 1+i$. Pertanto, in regime di capitalizzazione semplice, il tasso di interesse frazionato i_k è equivalente al tasso di interesse annuo se e solo se $i_k \cdot k = i$; equivalentemente $i_k = \frac{i}{k}$.

Ciò implica che in regime di capitalizzazione semplice ci si può sempre riferire ad una stesso tasso, usualmente scelto come quello annuale i, previa opportuna trasformazione.

Ad esempio, nell' (1.1.5) potevamo sostituire il tasso semestrale del 1,5% con il tasso annuale del 3% e calcolare il tempo in anni.

Esempio 1.1.10 Il tasso di interesse annuo, in regime di capitalizzazione semplice, è il 4%.
Calcolare sia il tasso trimestrale, sia il tasso quadrimestrale.
Il tasso trimestrale corrisponde a i_4; si ha $i_4 = \frac{i}{4} = \frac{4}{4} = 1\%$;
Il tasso quadrimestrale corrisponde a i_3; si ha $i_3 = \frac{i}{3} = \frac{4}{3} = 1.33\%$.

Esempio 1.1.11 Determinare la relazione intercedente, in regime di capitalizzazione semplice, tra i tassi frazionari i_6 e i_4.
Essendo $6 \cdot i_6 = i$, $4 \cdot i_4 = i$, si ha $6 \cdot i_6 = 4 \cdot i_4$, da cui $i_6 = \frac{4}{6} i_4 = \frac{2}{3} i_4$.

1.1.3 Attualizzazione

Da un punto di vista algebrico, la relazione intercedente tra una somma iniziale (cioè oggi) e una somma finale disponibile nel futuro stabilita dalla formula (1.1.1), continua a sussistere. Cambia però la problematica e il corrispondente linguaggio.
I problemi base sono del tipo:
"quanto vale oggi (oppure quanto ricevo oggi in cambio di) una somma disponibile ad una epoca futura $T > 0$?".
"se si vuole pagare in anticipo un debito che scade nel futuro, a quanto ammonta il pagamento?".
La somma disponibile ad una epoca successiva è denominata montante oppure valore finale, oppure valore nominale; in questa sezione la indicheremo con N;
il valore oggi di N è detto **valore attuale** e denominato con A.
$A - N$

In regime di capitalizzazione semplice sussistono quindi la relazioni

$$A = \frac{N}{1+it}; \quad i = \frac{N-A}{A \cdot t}; \quad t = \frac{N-A}{A \cdot i} \tag{1.1.5}$$

Esempio 1.1.12 . Il Sig. Rossi cede a una Banca un titolo di 5000 Euro scadente fra due anni al tasso annuo $i = 2\%$. Quanto riceve Rossi?

• In regime di capitalizzazione semplice **si riceve il valore attuale della somma**, ovvero:
$A = \frac{N}{1+it} = \frac{5000}{1+0.02 \cdot 2} = 4807.69$ Euro.

Esempio 1.1.13 Calcolare il valore attuale della somma di 10000 euro esigibile tra 3 anni, al tasso di interesse annuo del 2.5%.
• $A = \frac{N}{1+it} = \frac{10000}{1+0.025 \cdot 3} = 9302.32$ Euro.

Esempio 1.1.14 Un debito di 3000 euro esigibile tra 1 anno e 6 mesi è stato saldato con 2800 Euro. Quale tasso annuo è stato applicato?

• Si ha $N = 3000$, $A = 2800$, $t = 1.5$, da cui:
$i = \frac{N-A}{A \cdot t} = \frac{3000-2800}{2800 \cdot 1.5} = \frac{200}{4200} = 4.76\%$.

Esempio 1.1.15 Il Sig. Rossi cede per 3500 un titolo di 4000 Euro al tasso annuo $i = 3\%$.

Quanto tempo prima è stato incassato il titolo?

• Si ha $N = 4000$, $A = 3500$, $i = 0.03$, da cui:
$t = \frac{N-A}{A \cdot i} = \frac{4000-3500}{3500 \cdot 0.03} = \frac{500}{105} = 4.76$ anni, ovvero 4 anni, 9 mesi, 4 giorni.

• **BOT (buoni ordinari del tesoro)**

Un BOT è un titolo emesso dallo Stato al tempo $t = 0$ ad un prezzo A (detto prezzo di emissione) che dà diritto a riscuotere alla scadenza una somma N (detta valore nominale). I BOT sono titoli a breve termine con scadenza non superiore

ad un anno e possono essere acquistati da un valore nominale minimo di 1000 euro a multipli di tale cifra. La durata standard dei BOT è 3, 6 e 12 mesi. L'interesse è determinato dalla differenza tra il valore nominale e il prezzo pagato, cioè da $N - A$. La relazione tra A e N rientra quindi nello schema della capitalizzazione semplice; indicato con i il tasso di interesse annuo, si ha $N = A(1 + it)$, con t tempo espresso in frazioni di anno oppure $t = \frac{numero\ giorni}{360}$ nel caso di mensilità non intere.
Nel caso in cui i BOT vengano acquistati in un tempo $\bar{t}$ intermedio tra quello di emissione e quello di scadenza, il prezzo di acquisto viene valutato come il valore attuale di N al tempo $\bar{t}$.

Esempio 1.1.16 Si acquista un BOT del valore nominale di 11000 euro scadente tra 9 mesi. Calcolare il rendimento (tasso) annuo semplice del titolo se il prezzo di acquisto è pari a 10000 euro.

• Essendo $N = 11000$, $A = 10000$, dalla relazione $N = A(1+i\cdot t) = A(1+i\cdot 0.75)$ si ha $i = \dfrac{N - A}{A \cdot 0.75} = \dfrac{1000}{10000 \cdot 0.75} = 0.1333.$
Si è percepito quindi un interesse annuale del 13,33%.

Esempio 1.1.17 Si acquista un BOT del valore nominale di 4000 euro scadente tra 6 mesi e che fornisce un tasso di interesse annuo del 4%; dopo due mesi lo si rivende a tasso invariato. Calcolare:

a) il prezzo di acquisto del titolo;

b) il prezzo di vendita del titolo;

c) il rendimento effettivo realizzato dal primo compratore;

d) il rendimento realizzato dal secondo compratore.

• a) Iniziamo a calcolare il prezzo di acquisto o di emissione del titolo A.

Dalla relazione $A(1 + \frac{6}{12} \cdot 0.04) = 2000$, si ha $A = 3921.57$.

b) Alla fine dei primi due mesi il valore del titolo è uguale al valore attuale di

N scontato di quattro mesi ovvero a $A_1 = \frac{N}{1+\frac{4}{12}\cdot 0.04} = \frac{4000}{1+\frac{1}{3}\cdot 0.04} = 3947.37$. Tale valore rappresenta il valore di vendita del primo compratore e il prezzo di acquisto da parte del secondo compratore.

c) Il primo compratore acquista quindi per un ammontare di 3921.57 e vende per 3947.37. Deve risultare $3921(1+\frac{2}{12}i) = 3947.37$, da cui $i = 0.0395 = 3.95\%$. Si osservi che vendendo il titolo prima della scadenza si ottiene un rendimento inferiore.

d) Il secondo compratore acquista per un ammontare di 3947.37 euro e riceve 4000 euro alla scadenza. Si ha quindi $3947.37(1+\frac{4}{12}i)$= 4000, da cui $i = 0,399 = 3,99\%$.

1.1.4 Esercizi sulla capitalizzazione semplice

Esercizio 1.1.1

Calcolare, in regime di interessi semplici, il tasso trimestrale equivalente al tasso bimestrale del 10%.

- $i_4 = 15\%$.

Esercizio 1.1.2

Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di 15000 euro per 8 mesi, in regime di interessi semplici, al tasso annuo del 7%.

- $M = 15700$.

Esercizio 1.1.3

Calcolare il montante e l'interesse che si ottengono impiegando un capitale di 15000 euro per 5 anni, 2 mesi e 20 giorni in regime di interessi semplici, al tasso annuo del 6%.

- $M = 19700$. $I = 4700$.

Esercizio 1.1.4

Un capitale di 20500 euro viene investito al tasso annuo semplice del 5.25 % per 3 anni, 4 mesi e15 giorni. Calcolare il montante e l'interesse.

• $M = 24132.34$. $I = 3632.34$.

Esercizio 1.1.5 Calcolare, in regime di interessi semplici, il capitale che al 4% annuo ha prodotto un montante di 1500 euro in 2 anni e tre mesi.

• $C = 1376.15$.

Esercizio 1.1.6 Calcolare il valore attuale della somma di 20000 euro disponibile tra 10 mesi, in regime di interessi semplici, con tasso annuo di interesse del 6%.

• $A = 19047.62$.

Esercizio 1.1.7 Per quanto tempo, in regime di interessi semplici, occorre impiegare 1000 euro al 7% annuo per avere un montante di 1200 euro?

• $t = 2\ anni,\ 10\ mesi\ e\ 9\ giorni.$

Esercizio 1.1.8 Per quanto tempo, in regime di interessi semplici, occorre impiegare 10000 euro al 3% annuo per avere un montante di 10275 euro?

• $t = 11\ mesi.$

Esercizio 1.1.9

Un capitale di 8000 euro, investito al tasso annuo semplice per 4 anni, 6 mesi e10 giorni, ha prodotto un montante di 9068.56 euro. Calcolare l'interesse annuo.

• $i = 2.95\%$.

Esercizio 1.1.10

Un capitale di 18000 euro, investito al tasso annuo semplice per 3 anni, ha prodotto un montante di 21321 euro. Calcolare l'interesse annuo.

• $i = 6.15\%$.

Esercizio 1.1.11

Si acquista un BOT del valore nominale di 5000 euro scadente tra 1 anno. Calcolare il rendimento annuo semplice del titolo se il prezzo di acquisto è pari a 4800 euro.

R. $i = 4.17\%$.

Esercizio 1.1.12

Si acquista un BOT del valore nominale di 1000 euro scadente tra 6 mesi. Calcolare il prezzo di acquisto se il rendimento annuo semplice del titolo è pari al 3%.

R. $A = 985.22$.

Esercizio 1.1.13

Si acquista un BOT del valore nominale di 10000 euro che scade tra 1 anno e che fornisce un rendimento annuo semplice del 4%, e dopo 6 mesi lo si rivende (a rendimento invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo semplice realizzato detenendo il titolo per 6 mesi.

R. $A = 9615.38$, $V = 9803.92$, $i = 3,92\%$.

Esercizio 1.1.14

Si acquista un BOT del valore nominale di 10000 euro che scade tra 12 mesi al tasso annuo del 4%, e dopo 3 mesi lo si rivende (a tasso invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo realizzato detenendo il titolo per 3 mesi.

R. $A = 9615.38$, $V = 9708.74$, $i = 3,88\%$.

Esercizio 1.1.15

Si acquista un BOT del valore nominale di 15000 euro che scade tra 9 mesi al

tasso annuo del 2,5%, e dopo 6 mesi lo si rivende (a tasso invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo realizzato detenendo il titolo per 6 mesi.
R. $A = 14723.93$, $V = 14906.83$, $i = 2,48\%$.

Esercizio 1.1.16
Si acquista un BOT del valore nominale di 20000 euro che scade tra 10 mesi al tasso annuo del 4%, e dopo 4 mesi lo si rivende (a tasso invariato). Calcolare il prezzo di acquisto e il prezzo di vendita e determinare il rendimento annuo realizzato detenendo il titolo per 4 mesi.
R. $A = 19354.84$, $V = 19607.84$, $i = 3,92\%$.

1.2 Regime di capitalizzazione composta

In tale regime, che è attuato usualmente dalle banche e nelle operazioni finanziarie per periodi di tempo superiori all'anno, l'interesse percepito dal capitale investito non è più proporzionale al tempo di impiego. La motivazione sta nel fatto che una volta giunti al termine del periodo di riferimento del tasso, il capitale accumulato viene reinvestito e quindi il tasso di interesse viene applicato nel secondo periodo su una somma superiore e così via.
Vediamo in dettaglio, riferendoci ad un tasso annuale i relativo a un periodo di tempo prefissato.
Se C è il capitale investito al tempo $t = 0$, al termine del primo periodo il capitale accumulato diviene $C_1 = C(1 + i)$; al termine del secondo periodo il capitale accumulato diviene $C_2 = C_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$; al termine del terzo periodo il capitale accumulato diviene
$C_3 = C_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$ e così via.

Dopo t anni o frazioni di anno si ha la seguente

legge di capitalizzazione composta :

$$M = C(1+i)^t. \qquad (1.2.1)$$

Nella pratica, per periodi temporali compresi tra n e $n+1$ periodi, si applica la capitalizzazione composta per n periodi e la legge di capitalizzazione semplice per la frazione f di periodo restante. In altre parole si usa la formula

$$M = C(1+i)^n(1+if). \qquad (1.2.2)$$

La (1.2.2) è detta **legge di capitalizzazione composta con convenzione lineare**.

Il regime della capitalizzazione composta consiste nell'applicare la (1.2.1).

Gli interessi maturati sono dati da $I = M - C$.

Dalla formula (1.2.1) si ricavano le seguenti relazioni

$$C = \frac{M}{(1+i)^t}; \quad t = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)}; \quad i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \qquad (1.2.3)$$

Osservazione 1.2.1 Nel caso in cui il tasso di interesse sia semestrale, trimestrale ecc., le formule (1.2.1, 1.2.3) continuano a sussistere sostituendo al tasso i il tasso i_k e al tempo t il numero di periodi o frazioni di periodo corrispondenti al periodo scelto k.

Esempio 1.2.1 (*calcolo del montante*)

Si depositano in Banca 20000 euro al tasso di interesse annuo del 6%. Determinare il montante dopo tre anni e 4 mesi in regime di capitalizzazione composta, sia rispetto alla convenzione lineare, sia rispetto alla convenzione esponenziale.

• Si ha $C = 20000$, $i = 6\%$; con la convenzione lineare si devono capitalizzare 3 anni con la capitalizzazione composta e successivamente $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ di anno con la capitalizzazione semplice.

Si ha $M = 20000(1 + 0.06)^3(1 + 0.06 \cdot \frac{1}{3}) = 24296.726$;

con la convenzione esponenziale si devono capitalizzare $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ di anni con la capitalizzazione composta. Si ha $M = 20000(1 + 0.06)^{\frac{10}{3}} = 24287.504$.

Esempio 1.2.2 Un capitale di 5000 euro viene investito in capitalizzazione composta al tasso quadrimestrale del 1,5% per 2 anni e 2 mesi. Determinare il montante e l'interesse.

• Si ha $C = 5000$, $i_3 = 0.015$. Essendo il tasso quadrimestrale, il tempo deve essere espresso in quadrimestri. 2 anni e 2 mesi corrispondono a 24+2=26 mesi, ovvero a $\dfrac{26}{4} = 6.5$ quadrimestri. Quindi $t = 6.5$. Applicando la (1.2.1) si ottiene $M = 5000(1.015)^{6.5} = 5508.06$, da cui $I = 5508.06 - 5000 = 508.06$.

Esempio 1.2.3 Un capitale di 10000 euro viene investito in capitalizzazione composta al tasso trimestrale del 2% per 3 anni e 6 mesi. Determinare il montante.

• Si ha $C = 10000$, $i_4 = 0.02$. Essendo il tasso trimestrale, il tempo deve essere espresso in trimestri. 3 anni e 6 mesi corrispondono a 36+6=42 mesi, ovvero a $\dfrac{42}{3} = 14$ trimestri. Quindi $t = 14$. Applicando la (1.2.1) si ottiene $M = 10000(1.02)^{14} = 13194.79$.

Esempio 1.2.4 Un capitale di 10000 euro viene investito in capitalizzazione composta al tasso semestrale del 2% per 3 anni, 3 mesi e 10 giorni. Determinare il montante.

• Si ha $C = 10000$, $i_2 = 0.02$. Essendo il tasso semestrale, il tempo deve essere espresso in semestri. 3 anni e 3 mesi e 10 giorni corrispondono a $36+3+\dfrac{10}{30} = \dfrac{118}{3}$ mesi, ovvero a $\dfrac{59}{9} = 6.55555$ semestri. Quindi $t = 19.6666$. Applicando la (1.2.1) si ottiene $M = 10000(1.02)^{6.55555} = 11386.20$.

Esempio 1.2.5 Un capitale investito in capitalizzazione composta al tasso annuo del 6% per 5 anni, e 2 mesi, genera un montante di 8500 euro. Determinare il capitale.

• Si ha $M = 8500$, $i = 0.06$. Essendo il tasso annuale, il tempo deve essere espresso in anni. 5 anni e 2 mesi corrispondono a $2 + \dfrac{2}{12} = \dfrac{13}{6} = 2.16666$ anni. Quindi $t = 2.16666$. Applicando la (1.2.3) si ottiene $C = \dfrac{8500}{(1.06)^{2.16666}} = 7491.86$.

Esempio 1.2.6 (*calcolo del valore attuale*)
Calcolare il valore attuale di una somma di 30000 euro disponibile tra 3 anni e 5 mesi scontata al tasso annuo del 3%.

• Dalla (1.2.3) si ha

$$A = \frac{N}{(1+i)^t} \tag{1.2.4}$$

Rispetto ai dati del problema abbiamo $N = 30000$, $i = 3\%$,
$t = 3 + \frac{5}{12} = \frac{41}{12} = 3,41666$. Risulta $A = \frac{30000}{(1{,}03)^{3.41666}} = 27118.20$

Esempio 1.2.7 (*calcolo del valore attuale*)
Calcolare il valore attuale di una somma di 20000 euro disponibile tra 2 anni e 10 mesi scontata al tasso trimestrale del 1%.

• Rispetto ai dati del problema abbiamo $N = 20000$, $i_4 = 1\%$,
il numero di trimestri $t = \frac{2 \cdot 12 + 10}{3} = \frac{34}{3} = 11,33333$.
Risulta $A = \dfrac{N}{(1+i)^t} = A = \dfrac{20000}{(1,01)^{11.33333}} = 17867.71$

Esempio 1.2.8 (*calcolo del tasso di interesse*)
Calcolare il tasso di interesse annuo applicato ad un capitale di 10000 euro che ha prodotto dopo 5 anni un montante pari a 13382. 300 euro.

• Dalla (1.2.3) si ha

$$i = (\frac{M}{C})^{\frac{1}{t}} - 1 \tag{1.2.5}$$

Rispetto ai dati del problema abbiamo
$i = (\dfrac{13382.300}{10000})^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.06 = 6\%.$

Esempio 1.2.9 (*calcolo del tempo di impiego*)

Calcolare per quanto tempo dobbiamo impiegare un capitale di 80000 euro per ottenere un montante di 100000 euro, sapendo che ci viene offerto un tasso di interesse annuo del 6,4%.

• Dalla (1.2.3) si ha

$$t = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)} \tag{1.2.6}$$

Rispetto ai dati del problema abbiamo $t = \dfrac{\log 100000 - \log 80000}{\log(1,064)} = 3.59688.$

Si hanno 3 anni interi e 0.59688 frazione di anno; essendo 0.59688 frazione di anno $= 0.59688 \cdot 12 = 7.16256$ mesi $=$ 7mesi interi e 0.16256 frazione di mese, ed essendo 0.16256 frazione di mese $= 0.16256 \cdot 30 = 5$ giorni (approssimati per eccesso), si ha

t = 3 anni, 7 mesi e 5 giorni.

Esempio 1.2.10 . Il Sig. Rossi cede a una Banca un titolo di 5000 Euro scadente fra due anni al tasso annuo $i = 2\%$. Quanto riceve Rossi?

• In regime di capitalizzazione composta **si riceve il valore attuale della somma**, ovvero:

$A = \dfrac{N}{(1+i)^2} = \dfrac{5000}{1.02^2} = 4805.84$ Euro.

Esempio 1.2.11 Un debito D di 3000 euro esigibile tra 1 anno e 6 mesi è stato saldato pattuendo un tasso di interesse annuo del 4%. Qual è l'ammontare del saldo?

• In regime di capitalizzazione composta, il saldo rappresenta il valore attuale del debito.

Si ha $D = 3000$, $t = 1.5$, da cui:
$A = \frac{D}{(1+i)^t} = \frac{3000}{1.04^{1.5}} = 2828.86.$

1.2.1 Tassi frazionari equivalenti

Due tassi di interesse si dicono equivalenti se applicati ad uno stesso capitale producono lo stesso montante in una qualsiasi epoca temporale T.
Applicando ad un capitale unitario il tasso di interesse i_k per un anno, si perviene ad un montante $M = (1 + i_k)^k$; applicando allo stesso capitale unitario il tasso di interesse annuo i per un anno, si perviene ad un montante $M = 1 + i$.
Pertanto, in regime di capitalizzazione composta, il tasso di interesse frazionato i_k è equivalente al tasso di interesse annuo se e solo se $(1 + i_k)^k = 1 + i$. Si ha quindi

$$i = (1 + i_k)^k - 1; \quad i_k = (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1. \tag{1.2.7}$$

Esempio 1.2.12 Determinare la relazione intercedente, in regime di capitalizzazione composta, tra i tassi frazionari i_6 e i_4.
Essendo $(1 + i_6)^6 = 1 + i = (1 + i_4)^4$, si ha $(1 + i_6)^6 = (1 + i_4)^4$, da cui $1 + i_6 = (1 + i_4)^{\frac{4}{6}}$, $\quad i_6 = (1 + i_4)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Esempio 1.2.13
a) Determinare il tasso mensile equivalente al tasso bimestrale del 3% in regime di capitalizzazione composta;
b) determinare il tasso mensile equivalente al tasso bimestrale del 3% in regime di capitalizzazione semplice.
• a) Dalla relazione $(1 + i_{12})^{12} = (1 + i_6)^6$, si ha
$i_{12} = (1 + i_6)^{\frac{6}{12}} - 1 = (1,03)^{\frac{6}{12}} - 1 = 0,0148 = 1,48\%$.
b) Essendo $12 i_{12} = 6 i_6$, si ha $i_{12} = \frac{1}{2} i_6 = \frac{1}{2} \cdot 0.03 = 0.015 = 1,5\%$.

• **tasso annuo nominale convertibile k volte l'anno**

Come abbiamo visto, il calcolo di un tasso frazionario dal tasso di interesse annuo coinvolge una radice. Per ovviare a questo inconveniente, per comodità, ci si riferisce al cossidetto tasso annuo nominale convertibile k volte l'anno, indicato da j_k e definito da $j_k = ki_k$.

j_k è un tasso fittizio e pertanto nei calcoli occorre sempre riferirsi a $i_k = \dfrac{j_k}{k}$.

Esempio 1.2.14 Il tasso annuo nominale convertibile 3 volte l'anno è uguale al 6%. Calcolare il tasso annuo effettivo.

• Si ha $j_3 = 3i_3 = 6\%$ e quindi un tasso quadrimestrale dato da $i_3 = \frac{j_3}{3} = 2\%$.
Risulta $(1 + i_3)^3 = 1 + i$, da cui $i = (1 + i_3)^3 - 1 = 1.02^3 - 1 = 6.12\%$.

Esempio 1.2.15

Calcolare il montante di un capitale di 1000 euro impiegato al tasso annuo nominale convertibile due volte all'anno del 6% per 18 mesi.

• Si ha $j_2 = 6\%$ e quindi un tasso semestrale dato da $i_2 = \frac{j_2}{2} = 3\%$.
Risulta $M = 1000(1, 03)^3 = 1092.72$.

Esempio 1.2.16

Calcolare il valore attuale di una somma di 10000 euro disponibile tra 21 mesi scontata al tasso al tasso annuo nominale convertibile 4 volte all'anno del 8.5%.

• Si ha $j_4 = 2.5\%$ e quindi un tasso trimestrale dato da $i_4 = \frac{j_4}{4} = 2.125\%$.
Risulta $A = \dfrac{10000}{(1 + i_4)^7} = \dfrac{10000}{(1.02125)^7} = 8631.29$.

1.2.2 Esercizi sulla capitalizzazione composta

Esercizio 1.2.1

Determinare il tasso semestrale, trimestrale, quadrimestrale, mensile, equivalenti al tasso annuo effettivo del 8%.

• Dalla relazione 1.2.7 si ha:

- tasso semestrale $i_2 = 3.92\%$;
- tasso trimestrale $i_4 = 1.94\%$;
- tasso quadrimestrale $i_3 = 2.6\%$;
- tasso mensile $i_{12} = 0.64\%$

Esercizio 1.2.2

Determinare il tasso semestrale, trimestrale, mensile, annuo, equivalenti al tasso quadrimestrale del 3%.

• Si determina dapprima il tasso annuo e, successivamente, si opera come nell'esercizio precedente.

Dalla relazione $i = (1 + i_k)^k - 1$ si ha $i = 9.27\%$.

- tasso semestrale $i_2 = 4.53\%$;
- tasso trimestrale $i_4 = 2.24\%$;
- tasso mensile $i_{12} = 0.74\%$

Esercizio 1.2.3

Determinare il tasso semestrale, annuo, equivalenti al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6%.

• Si ha $j_4 = 4i_4$, ovvero $i_4 = \frac{j_4}{4} = \frac{6}{4} = 1.5\%$.

$i = 6.14\%$; tasso semestrale $i_2 = 3.02\%$.

Esercizio 1.2.4

Calcolare il montante che si ottiene impiegando per 4 anni la somma di 5000 euro al tasso trimestrale del 2%.

• $M = 6863.93$

Esercizio 1.2.5

Calcolare il capitale che impiegato per 2 anni e 6 mesi al tasso quadrimestrale del 2.5% produce un montante di 8000 euro.

• $C = 6647.54$

Esercizio 1.2.6

Calcolare il valore attuale di 10000 euro esigibili fra 3 anni e 6 mesi al tasso semestrale del 3.5%.

• $A = 7859.91$

Esercizio 1.2.7

Un capitale di 900 euro impiegato per 1 anno e 3 mesi produce un montante di 1000 euro. Calcolare il tasso annuo.

• $i = 8.79\%$

Esercizio 1.2.8

Un capitale di 35000 euro impiegato per 4 anni, 7 mesi e 15 giorni produce un montante di 46212.77 euro. Calcolare il tasso di interesse semestrale.

• $i_2 = 3.05\%$

Esercizio 1.2.9

Un capitale di 1500 euro impiegato al tasso mensile del 1% produce un montante di 1750 euro. Calcolare il tempo di impiego.

• $t = 15,49$ mesi, ovvero 1 anno, 3 mesi, 15 giorni.

Esercizio 1.2.10

Un capitale di 24450 euro impiegato al tasso semestrale del 2.75% ha prodotto un montante di 30767.85 euro. Calcolare il tempo di impiego.

• 4 anni, 2 mesi, 25 giorni.

Esercizio 1.2.11 . Un credito di 10000 Euro scadente fra 4 anni è riscosso oggi al tasso annuo semestrale del 1%. Quanto viene ricevuto?

• Si riceve il valore attuale del debito pari a 9234.83 Euro.

Esercizio 1.2.12 Un debito D di 8000 euro esigibile tra 4 anno e 6 mesi è stato saldato pattuendo un tasso di interesse annuo del 3%. Qual è l'ammontare del saldo?

• Il saldo corrisponde al valore attuale del debito pari a 7003.62.

1.2.3 Valore attuale e montante di più capitali

• Supponiamo di avere due debiti, il primo di 3000 euro da pagare tra due anni e il secondo di 5000 euro da pagare tra 5 anni. Chiediamo di estinguere oggi i due debiti pattuendo un tasso di interesse annuo del 2%. Quanto dobbiamo pagare? Sappiamo che in regime di capitalizzazione composta **il valore oggi (tempo t=0) di un debito futuro coincide con il valore attuale del debito**.

Quindi il debito di 3000 euro viene estinto con il suo valore attuale

$\dfrac{3000}{1.02^2} = 2883.51.$

Analogamente, il debito di 5000 euro viene estinto con il suo valore attuale

$\dfrac{5000}{1.02^5} = 4528.65.$

Complessivamente, i due debiti vengono saldati con $2883.51 + 4528.65 = 7412.16$ euro, corrispondenti alla somma dei due singoli valori attuali.

In generale possiamo affermare che **il valore attuale di più capitali è uguale alla somma dei valori attuali dei singoli capitali calcolati secondo il regime di capitalizzazione scelto (usualmente quello della capitalizzazione composta)**.

• Il Sig. Rossi ha depositato in Banca 5 anni fa 3000 euro e due anni fa 7000 euro ad un tasso di interesse annuo composto del 2.5%. Tra tre anni il Sig. Rossi ritirerà tutto il capitale accumulato. Quanto riscuoterà il Sig. Rossi?

In capitalizzazione composta, un capitale C investito per un periodo di tempo ad un tasso di interesse annuo i produce un montante pari a $M = C(1+i)^t$. Ne consegue che

- 3000 euro investiti per 5+3=8 anni producono un montante pari a $M = 3000(1.025)^8 = 3655.21$ euro;

- 7000 euro investiti per 2+3=5 anni producono un montante pari a $M = 7000(1.025)^5 = 7919.86$ euro.

Complessivamente il Sig. Rossi riscuoterà $3655.21 + 7919.86 = 11575.07$ euro, corrispondenti alla somma dei due singoli montanti.

In generale possiamo affermare che **il montante di più capitali è uguale alla somma dei montanti dei singoli capitali calcolati secondo il regime di capitalizzazione scelto (usualmente quello della capitalizzazione composta)**.

Esempio 1.2.17

Calcolare a quanto possono essere scambiati oggi due crediti futuri, il primo di 10000 euro tra 1 anno e 2 mesi e il secondo di 8000 euro tra 2 anni e 6 mesi, in regime di interessi composti con tasso annuo convertibile semestralmente del 8%.

•

Si devono calcolare i valori attuali dei singoli capitali e poi sommarli tra loro.

Essendo $j_2 = 8\%$, si ha come tasso semestrale $i_2 = 4\%$.

Il valore attuale del primo capitale, tenuto conto che 1 anno e 2 mesi corrispondono a $\frac{14}{6} = 2.33333$ semestri, è uguale a $\frac{10000}{1.04^{2.33333}} = 9125.48$ euro;

Il valore attuale del secondo capitale, tenuto conto che 2 anni e 6 mesi corrispondono a $\frac{30}{6} = 5$ semestri, è uguale a $\frac{8000}{1.04^5} = 6575.42$ euro.

I due crediti vengono saldati con $9125.48 + 6575.42 = 15700.90$ euro.

Esempio 1.2.18

La Sig.ra Euroni ha depositato in banca le seguenti somme di denaro:

a) tre anni fa la somma di euro 900 ad interesse semplice, tasso annuo del 7%;

b) due anni e quattro mesi fa la somma di euro 500, al tasso del 6%,, in regime di capitalizzazione composta con convenzione lineare;

c) un anno e mezzo fa la somma di euro 1200, al tasso del 4%, in regime di capitalizzazione composta con convenzione esponenziale.

Quanto capitale dispone oggi la Sig.ra Euroni?

•

Si devono calcolare i montanti dei singoli capitali e poi sommarli tra loro.

Il montante del primo capitale è uguale a $900(1 + 0.07 \cdot 3) = 1089$ euro;

Il montante del secondo capitale è uguale a $500(1.06)^2(1 + 0.06 \cdot \frac{4}{12}) = 573.036$ euro;

Il montante del terzo capitale è uguale a $1200(1.04)^{1.5} = 1272.724$ euro.

La Sig.ra Euroni dispone oggi della somma dei singoli montanti pari a $1089 + 573.036 + 1272.724 = 2934.76$ euro.

Esempio 1.2.19

La Sig.ra Euroni ha depositato in banca le seguenti somme di denaro:

a) tre anni fa la somma di euro 900 ad interesse semplice, tasso annuo del 7%;

b) due anni e quattro mesi fa la somma di euro 500, al tasso del 6%,, in regime di capitalizzazione composta con convenzione lineare;

c) un anno e mezzo fa la somma di euro 1200, in regime di capitalizzazione composta con convenzione esponenziale.

Sapendo che la signora Euroni riceve oggi la somma complessiva di euro 2934.76 determinare a quale tasso annuo d'interesse è stata impiegata la terza somma di denaro.

•

2934,76 rappresenta la somma dei montanti dei singoli capitali. Tali montanti, denotato con i il tasso di interesse annuo impiegato per la terza somma di denaro, sono dati da:

- $900(1+0.07\cdot 3) = 1089$ euro;
- $500(1.06)^2(1+0.06\cdot\frac{4}{12}) = 573.036$ euro;
- $1200(1+i)^{1.5}$ euro.

Si deve quindi avere l'uguaglianza $1089 + 573.036 + 1200(1+i)^{1.5} = 2934.76$, da cui $1200(1+i)^{1.5} = 2934.76 - 1089 - 573.036 = 1272.724$.

Si ottiene $i = (\frac{1272.724}{1200})^{\frac{1}{1.5}} - 1 = 0.04 = 4\%$.

1.2.4 Esercizi sul valore attuale e montante di più capitali

Esercizio 1.2.13

Calcolare il valore attuale di due crediti futuri, il primo di 5000 euro tra 1 anno e 4 mesi e il secondo di 2000 euro tra 2 anni e 6 mesi, in regime di interesse composto al tasso annuo del 10%.

• $A = 5979.28$.

Esercizio 1.2.14

Verranno effettuati due versamenti, il primo di 1000 euro tra 6 mesi e il secondo di 1500 euro tra 15 mesi. Calcolare, in regime di interessi composti con tasso annuo del 5%, il montante disponibile tra 3 anni.

• $M = 1000(1.05)^{2.5} + 1500(1.05)^{1.75} = 2763.42$ euro.

Esercizio 1.2.15

Si riscuotono due crediti: 5000 euro tra 16 mesi e 9000 euro tra due anni e mezzo, al tasso di interesse composto quadrimestrale del 1%. Quanto si riscuote?

• $A = 4804.9017 + 8352.8024 = 13157.70$.

Esercizio 1.2.16 Si estinguono oggi due debiti al tasso trimestrale composto del 1.5%, il primo di 8000 euro da pagare tra 15 mesi e il secondo di 15000 euro da pagare tra 2 anni e tre mesi. Quanto viene pagato?

• $A = 7426.0826 + 13118.884 = 20544.97$

Esercizio 1.2.17

Volendo investire 3000 euro per 30 mesi dobbiamo valutare le seguenti alternative:

a) ritirare alla scadenza euro 3440;

b) investire in regime di capitalizzazione semplice al tasso trimestrale del $1,5\%$;

c) investire in regime di capitalizzazione composta, convenzione lineare, al tasso annuo effettivo del $5,5\%$.

Si impiega la somma di denaro scegliendo l'alternativa piú conveniente.

Alla scadenza dei 30 mesi, il montante ottenuto viene sommato ad un capitale di X euro e la somma complessiva viene investita per 18 mesi ad un tasso semestrale effettivo dello $0,5\%$ in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale.

Determinare l'importo X sapendo che il montante finale è pari a euro $4080,6$.

• Si sceglie b), con 3450 euro. X = 570 euro.

Esercizio 1.2.18

Si devono riscuotono oggi tre crediti: 7500 euro oggi stesso, 9000 euro tra 1 anno e 8 mesi e 10500 euro tra 4 anni. Quanto si incasserà se la riscossione avviene con un tasso di interesse quadrimestrale dell' 1.5%??

• $A = 24636.41$.

1.2.5 Valore attuale e montante di rate uguali

Avremo occasione in seguito di considerare vari versamenti o riscossioni costituiti tutti da rate uguali. Supponiamo ad esempio di volere calcolare il montante e il valore attuale, al tasso di interesse annuo i, dei seguenti capitali:
500 euro tra un anno, 500 euro tra due anni, 500 euro tra tre anni, 500 euro tra quattro anni e 500 euro tra cinque anni.
Il montante corrispondente all'ultimo capitale dei capitali è uguale a

$$M = 500(1+i)^4 + 500(1+i)^3 + 500(1+i)^2 + 500(1+i) + 500$$

Mettendo in evidenza e commutando i termini, si ha

$$M = 500\big[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4\big]$$

Posto $q = 1+i$ si ha, all'interno della parentesi, la somma $1 + q + q^2 + q^3 + q^4$.
Per calcolare tale somma S, basta effettuare un piccolo artificio:
$S = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4$; moltiplicando ambo i membri per q otteniamo
$qS = \quad q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$. Sottraendo la prima relazione dalla seconda si ha $S - qS = 1 - q^5$, da cui $S(1-q) = 1 - q^5$ e quindi $S = \dfrac{1-q^5}{1-q}$. Ritornando al montante, sostituendo q=1+i, si ottiene

$$M = 500\frac{1-(1+i)^5}{-i} = 500\frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

In generale, la sequenza di n numeri:
$1, q, q^2, q^3, ..., q^{n-1}$.
T è detta **progressione geometrica** in quanto ogni elemento (escluso il primo) si ottiene dal precedente moltiplicandolo per q; q è detta **ragione**.
Usando lo stesso artificio precedente si ha $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Conseguentemente, il montante M di n rate R uguali al tasso di interesse i, esigibili o riscuotibili in periodi uguali, è uguale a:

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{1.2.8}$$

Per ottenere il valore attuale è sufficiente dividere M per $(1+i)^n$. Si ottiene

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{1.2.9}$$

Infine la rata è uguale a

$$R = A\,\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{1.2.10}$$

Esempio 1.2.20 Calcolare il valore attuale e il montante di 5 rate uguali a 5000 euro versate alla fine di ogni anno al tasso di interesse annuo del 3%.

•

Applicando la (1.2.9), si ha
$A = 5000\dfrac{1-(1.03)^{-5}}{0.3} = 5000 \cdot 4.58 = 22898.54$
Applicando la (1.2.8), si ha
$M = 5000\dfrac{(1.03)^5 - 1}{0.3} = 5000 \cdot 5.31 = 26545.68$

Esempio 1.2.21 Si riscattano oggi 4 rate uguali a 1000 euro ciascuna esigibili alla fine di ogni anno al tasso di interesse $i = 2\%$ e una somma di 10000 euro esigibile tra 4 anni.
Quanto si incassa?

•

Applicando la (1.2.9), si ha
$A_1 = 1000\dfrac{1-(1.02)^{-4}}{0.02} = 1000 \cdot 3.81 = 3807.73$
Il valore attuale di 10000 euro al tempo $t = 4$ è
$A_1 = \dfrac{10000}{1.02^4} = 9238.45$

Si incassano 3807.73+9238.45=13046.18 euro

Esempio 1.2.22 Un debito è stato estinto tramite 8 rate semestrali di 1200 Euro ciascuna al tasso di interesse annuo del 4.04%.

A quanto ammontava il debito?

• Essendo le rate semestrali occorre innanzitutto calcolare il tasso semestrale i_2.

Dalla relazione $(1 + i_2)^2 = 1 + i = 1.0404$, si ha $i_2 = 2\%$.

Poichè il debito corrisponde al valore attuale delle rate si ha, applicando la (1.2.9),

$A = 1200\ \dfrac{1 - (1.02)^{-8}}{0.02} = 1200 \cdot 7.32548 = 8790.58$

Esempio 1.2.23 Un debito di 8000 euro viene estinto tramite 12 rate trimestrali costanti al tasso di interesse $i_4 = 3\%$.

Calcolare la rata.

• Siamo in grado di calcolare direttamente la rata tramite la (1.2.10). Si ha

$R = 8000\ \dfrac{0.03}{1 - (1.03)^{-12}} = 8000 \cdot 0.1004621 = 803.70$

Esempio 1.2.24 Un debito di 5242.14 euro viene estinto tramite il pagamento di rate costanti uguali a 1000 euro al tasso di interesse annuo del 4%.

Calcolare il numero delle rate.

• Riferiamoci inizialmente alla formula (1.2.10) del valore attuale che coincide con il debito. Si ha:

$5242.14 = 1000\ \dfrac{1 - (1.04)^{-n}}{0.04}$, da cui

$1 - (1.04)^{-n} = \dfrac{5242.14 \cdot 0.04}{1000} = 0.2096856.$

Conseguentemente, $(1.04)^{-n} = 1 - 0.2096856 = 0.7903144$ ovvero

$(1.04)^n = \dfrac{1}{0.7903144} = 1.2653192$. Infine $n = \dfrac{\log 1.2653192}{\log 1.04} = 6$.

1.2.6 Esercizi

Esercizio 1.2.19 Calcolare il valore attuale e il montante di 10 rate uguali a 1500 euro versate alla fine di ogni anno al tasso di interesse annuo del 4%.

• $A = 12166.34; \quad M = 18009.16.$

Esercizio 1.2.20 Si riscattano oggi 6 rate uguali a 2500 euro ciascuna esigibili alla fine di ogni anno al tasso di interesse $i = 6\%$ e una somma di 3000 euro esigibile tra 6 anni.

Quanto si incassa?

• $A = 12293.31 + 2114.88 = 14408.19.$

Esercizio 1.2.21 Un debito è stato estinto tramite 6 rate annue di 1000 Euro ciascuna al tasso di interesse annuo del 4%.

A quanto ammontava il debito?

• $A = 5242.14.$

Esercizio 1.2.22 Un debito di 15000 euro viene estinto tramite 20 rate semestrali costanti al tasso di interesse $i_2 = 1\%$.

Calcolare la rata.

• $R = 831.23$

Esercizio 1.2.23 Un debito di 12381.38 euro viene estinto tramite il pagamento di rate costanti uguali a 1000 euro al tasso di interesse annuo del 2.5%.

Calcolare il numero delle rate.

• $n = 15.$

1.2.7 Lo sconto commerciale

Nella pratica commerciale, in determinati casi, un debito N viene saldato applicando uno sconto S sull'ammontare del debito tramite la formula $S = Ndt$ ove t è il tempo anticipato rispetto alla scadenza del debito e d è il tasso applicato a N detto **tasso di sconto**.

Esempio 1.2.25 Una cambiale è un titolo di credito contenente la promessa di pagare o di far pagare, a favore del possessore, una determinata somma di denaro dovuta secondo una specifica scadenza.

Una cambiale di 400 euro scadente tra 2 anni viene scontata al tasso di sconto annuo del 5%. Calcolare a quanto viene riscattata la cambiale.
• I dati sono $N = 400$, $d = 5\%$, $t = 2$. Lo sconto commerciale è dato da $S_c = Ndt = 400 \cdot 0.05 \cdot 2 = 40$, da cui $A = N - S = 400 - 40 = 360$. Il debito estinto è di 360 euro.

Esempio 1.2.26 Una cambiale di 120 euro scadente tra 100 giorni viene pagata oggi con 118 euro. Calcolare il tasso di sconto.
• I dati sono $N = 120$, $A = 118$, $t = 100gg.$. Si ha
$S_c = N - A = 2 = Ndt = 120 \cdot d \cdot \frac{100}{360} = \frac{100}{3}d$, da cui $d = \frac{6}{100} = 6\%$.

Osservazione 1.2.2 Precedentemente avevamo calcolato il valore attuale di un debito usando la formula della capitalizzazione semplice o composta. Nell'ambito di una richiesta anticipata di un debito o credito, per distinguere i diversi procedimenti, ci si riferisce:
• allo **sconto razionale semplice** quando lo sconto S viene calcolato come differenza tra Il valore nominale N e il valore attuale $A = \dfrac{N}{1+it}$;
• allo **sconto razionale composto** quando lo sconto S viene calcolato come

differenza tra Il valore nominale N e il valore attuale $A = \dfrac{N}{(1+i)^t}$.
La relazione intercedente tra il tasso di sconto annuo d e il tasso annuo i è la seguente :

$$d = \frac{i}{1+i}; \quad i = \frac{d}{1-d}. \tag{1.2.11}$$

1.2.8 Esercizi sullo sconto commerciale

Esercizio 1.2.24 Una cambiale di 400 euro scadente tra 2 anni viene scontata al tasso di sconto annuo del 5%. Calcolare il valore attuale.

- $A = 360$.

Esercizio 1.2.25

Calcolare il valore attuale della somma di 3000 euro disponibile tra 8 mesi in regime di sconto commerciale con tasso di sconto del 5% annuo.

R. $S_c = 3000 \cdot 0.05 \cdot \frac{8}{12} = 100, \;\; A = 3000 - 100 = 2900.$

Esercizio 1.2.26

Una cambiale di 1000 euro scadente tra 6 mesi viene ritirata al tasso di sconto del 6%. Calcolare la somma ricevuta.

R. $S_c = 1000 \cdot 0.06 \cdot \frac{6}{12} = 30, \;\; A = 1000 - 30 = 970.$

Esercizio 1.2.27

Una cambiale di 1500 euro scadente tra 3 mesi viene ritirata al tasso annuo del 8%. Calcolare la somma ricevuta. (calcolare dapprima d).

R. $d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.08}{1.08} = 0.0793651; \;\; S_c = 1500 \cdot 0.0793651 \cdot \frac{3}{12} = 29.76,$

$A = 1500 - 29.76 = 1470.24.$

Esercizio 1.2.28

Calcolare lo sconto razionale e quello commerciale su una cambiale di 400 euro con scadenza a 2 mesi, al tasso di interesse annuo del 4.5%.

R. $A = \frac{N}{1+it} = \frac{400}{1+0.045 \cdot \frac{2}{12}} = 397.02$; $S_c = 400 - 397.02 = 2.98$.

$d = \frac{0.045}{1.045} = 0.0430622$; $S_c = 400 \cdot 0.0430622 \cdot \frac{2}{12} = 2,87$; $A = 400 - 2,87 = 397.13$.

Esercizio 1.2.29

Una cambiale di 800 euro con scadenza a 5 mesi è saldata oggi con 720 euro. Calcolare il tasso di sconto.

R. $800(1 - d \cdot \frac{5}{12}) = 720$, $d = 24\%$.

Esercizio 1.2.30

Calcolare la scadenza di una cambiale avente valore nominale di 12000 euro che scontata commercialmente al tasso annuo del 4%, porta ad un valore di 11857.2 euro.

R. $12000(1 - 0.04t) = 11857.2$, $t = 0.9375$ anni, $t = 3$ mesi e 17 giorni.

1.3 Rendite

Abbiamo affrontato finora il il problema della valutazione ad una data epoca di un importo disponibile in una altra epoca. In molte situazioni ci si trova però a valutare in una unica soluzione più importi che sono disponibili in tempi diversi; di questi importi si ha interesse a valutare il loro valore attuale complessivo (al tempo iniziale $t = 0$) e il loro montante complessivo alla scadenza finale.

Si parla di **rendite finanziarie** se la somma da esigere o da pagare ad epoche diverse sono rappresentate tutte da debiti o tutte da crediti.

Si parla di **operazioni finanziarie** se la somma da esigere o da pagare ad epoche diverse sono rappresentate in parte da debiti e in parte da crediti.

Una rendita finanziaria è quindi una sequenza di capitali (**rate**) da esigere o da versare in tempi diversi (**scadenze**).

$(R_0, t = 0) - - - - - - - - -(R_1, t_1) - - - - - -(R_2, t_2) - - - - - (R_n, t_n)$

Il valore attuale di una rendita è la somma dei valori attuali delle singole rate calcolati secondo il regime di capitalizzazione prescelto. Usualmente è quello della capitalizzazione composta.

Il montante di una rendita è la somma dei montanti delle singole rate calcolati secondo il regime di capitalizzazione prescelto. Usualmente è quello della capitalizzazione composta.

Le rendite si classificano nel seguente modo:

- rendite a **rata costante**: le rate sono tutte uguali;
- rendite **periodiche**: le rate si susseguono ad intervalli di tempo uguali, detti **periodi**;
- rendite **posticipate**: le rate sono pagate alla fine di ogni periodo;
- rendite **anticipate**: le rate sono pagate all'inizio di ogni periodo;
- rendita **immediata**: la prima rata è versata nel primo periodo; se è versata dopo un certo numero di periodi, tale numero è detto *differimento*.

Ovviamente una rendita si porta dietro più denominazioni. Ad esempio: rendita periodica posticipata a rate costanti.

• Rendite periodiche, immediate, posticipate a rata costante

Si versano n rate di uguale importo R in intervalli di tempo uguali, la prima delle quali al termine del primo periodo e l'ultima al termine dell'ultimo periodo.

Ci riferiremo al tasso annuo composto i ricordando che tutte le formule che stabiliremo valgono anche sostituendo i con i_k e calcolando tutti i tempi rispetto al periodo k.

Rate	0	R	R	R	R.....R
t	0	1	2	3	4......n

• **Montante e Valore Attuale**

Essendo il montante complessivo la somma dei singoli montanti si ottiene:

$M = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i) + R =$

$= R\big[1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\big]$.

Abbiamo quindi una somma di n elementi di una progressione geometrica di ragione $q = 1+i$; conseguentemente, $M = R\,\dfrac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$.

E' uso porre $s_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$; $s_{n,i}$ prende il nome di "s figurato n al tasso i".

Ricordando che $A = \dfrac{M}{(1+i)^n}$, si ottiene per A l'espressione $A = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

E' uso porre $a_{n,i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$; $a_{n,i}$ prende il nome di "a figurato n al tasso i".

Concludendo:

• **Formule di una rendita posticipata**

$$M = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad R = M\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} \tag{1.3.1}$$

$$A = \frac{R}{i}\,\big[1-(1+i)^{-n}\big]; \quad R = A\,\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{1.3.2}$$

• **Rendite periodiche, immediate, anticipate a rata costante**

A differenza del caso precedente, la prima rata è pagata immediatamente (tempo zero) mentre l'ultima rata è pagata un anno prima dell'epoca finale. Conseguentemente, ogni rata viene capitalizzata un periodo in più rispetto alla analoga rendita posticipata. La stessa logica vale per il calcolo del valore attuale per cui si ha:

• **Formule di una rendita anticipata**

$$M = R(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad R = \frac{Mi}{(1+i)(1+i)^n - 1) } \tag{1.3.3}$$

$$A = \frac{R(1+i)}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]; \quad R = \frac{Ai}{(1+i)(1-(1+i)^{-n})} \tag{1.3.4}$$

Osservazione 1.3.1 Per non studiare troppe formule, si consiglia lo studente di seguire queste regole nel caso di rendita anticipata:

1) calcolare montante, valore attuale, rata come se la rendita fosse posticipata;

2) moltiplicare il montante per (1+i) per avere il montante richiesto;

3) moltiplicare il valore attuale per (1+i) per avere il valore attuale richiesto;

4) dividere la rata per (1+i) per avere la rata richiesta.

Esempio 1.3.1

a) Determinare il montante M e il valore attuale A di una rendita semestrale di 28 rate posticipate di euro 180, al tasso annuo del 7% convertibile semestralmente;

b) determinare M e A nel caso di rendita anticipata.

•

a) Essendo $j_2 = 2 \cdot i_2 = 7$, si ha un tasso semestrale effettivo $i_2 = 3.5\%$. Prendendo come periodo il semestre si ha $n = 28$. Tenuto conto che $R = 180$, risulta $M = R\,\frac{(1+i_2)^n - 1}{i_2} = 180\,\frac{(1.035)^{28} - 1}{0.035} = 8332.31$;

$A = \frac{R}{i_2}\left[1-(1+i_2)^{-n}\right] = \frac{180}{0.035}\left[1-(1.035)^{-28}\right] = 3180.06$

b) Nel caso di rendita anticipata si ha

$M = 8332.31 \cdot 1.035 = 8623.94, \quad A = 3180.06 \cdot 1.035 = 3291.36.$

Esempio 1.3.2

Determinare il valore attuale e il montante di una rendita annuale di 6 rate posticipate di euro 100, al tasso annuo del 3%.

Rate	0	100	100	100	100	100	100
t	0	1	2	3	4	5	6

•

Si ha $R = 100$, $n = 6$, $i = 3\%$. Applicando la 1.3.4, si ha

$A = 100 \, \dfrac{1 - 1.03^{-6}}{0.03} = 541.72.$

Per calcolare il montante basta osservare che

$M = A(1+i)^n = 541.72(1.03)^6 = 646.85.$

Esempio 1.3.3

Determinare il montante di una rendita annuale di 6 rate anticipate costanti di euro 100, al tasso annuo del 3%.

Rate	100	100	100	100	100	100	0
t	0	1	2	3	4	5	6

•

Si ha $R = 100$, $n = 6$, $i = 3\%$.

Consideriamo dapprima il caso standard

Rate	100	100	100	100	100	100
t	0	1	2	3	4	5

Il montante al tempo t=5, ovvero il valore V_5 di tutte le sei rate è dato da $V_5 = 100\,\dfrac{1.03^6 - 1}{0.03} = 646.84$. Abbiamo quindi la seguente scala temporale

Rate	646.84	0
t	5	6

dalla quale si comprende che il valore V_5 al tempo t=5 deve essere capitalizzato di un anno per avere il montante desiderato.

Si ha $M = V_5(1+i) = 646.84 \cdot 1.03 = 666.25$.

Esempio 1.3.4

In un periodo temporale di 10 anni vengono versate sei rate costanti di 100 euro ai tempi $t = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Calcolare il valore attuale dei versamenti e il montante al termine del decimo anno al tasso annuo del 3%.

•

Si ha la seguente scala temporale

Rate	0	0	100	100	100	100	100	1000	0	0	0
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Per ricondursi ai casi standard, consideriamo la scala temporale

Rate	0	100	100	100	100	100	1000
t	1	2	3	4	5	6	7

Si ha, al tempo $t = 1$, una rendita posticipata di sei rate costanti per cui il valore attuale V_1 al tempo $t = 1$ è dato da

$V_1 = 100\,\dfrac{1 - 1.03^{-6}}{0.03} = 541.72$. Abbiamo ora la seguente scala temporale

Rate	0	$V_1 = 541.72$
t	0	1

Conseguentemente, il valore attuale al tempo $t = 0$ è
$A = \dfrac{V_1}{1+i} = \dfrac{541.72}{1.03} = 525.94.$
Il montante al termine del decimo anno è

$M = A(1+i)^{10} = 525.94 \cdot 1.03^{10} = 706.82$

Esempio 1.3.5

In un periodo temporale di 6 anni vengono versate tre rate costanti di 100 euro ai tempi $t = 1, 2, 3$ e tre rate costanti di 200 euro ai tempi $t = 4, 5, 6$. Calcolare il valore attuale dei versamenti e il montante al termine del sesto anno al tasso annuo del 2%.

•

Si ha la seguente scala temporale

Rate	0	100	100	100	200	200	200
t	0	1	2	3	4	5	6

Per ricondursi ai casi standard, consideriamo le scale temporali

Rate	0	100	100	100
t	0	1	2	3

Rate	0	200	200	200
t	3	4	5	6

Il valore attuale V_0 delle tre rate da 100 euro è
$V_0 = 100\ \dfrac{1-1.02^{-3}}{0.02} = 288.39.$
Al tempo $t = 3$, il valore attuale V_3 delle tre rate costanti di 200 euro è dato da
$V_3 = 200\ \dfrac{1-1.02^{-3}}{0.02} = 576.78.$ Abbiamo ora la seguente scala temporale

Rate	0	0	0	$V_3 = 576.78$
t	0	1	2	3

Conseguentemente, il valore attuale di V_3 al tempo $t = 0$ è
$V_0^{(3)} = \dfrac{V_3}{(1+i)^3} = \dfrac{576.78}{(1.02)^3} = 543.51.$
Il valore attuale di tutti i capitali è la somma dei singoli valori attuali trovati ovvero:

$A = V_0 + V_0^{(3)} = 288.39 + 543.51 = 831.90.$

Il montante al termine del sesto anno è

$M = A(1+i)^6 = 831.90 \cdot 1.02^6 = 936.85$

Esempio 1.3.6

In un periodo temporale di 8 anni vengono versate tre rate costanti di 100 euro ai tempi $t = 1, 2, 3$, tre rate costanti di 300 euro ai tempi $t = 5, 6, 7$ e una rata di 500 euro al tempo $t = 8$. . Calcolare il valore attuale dei versamenti e il montante al termine dell'ottavo anno al tasso annuo del 1%.

•

Si ha la seguente scala temporale

Rate	0	100	100	100	0	300	300	300	500
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Per ricondursi ai casi standard, consideriamo le tre scale temporali

Rate	0	100	100	100
t	0	1	2	3

Rate	0	300	300	300
t	4	5	6	7

Rate	0	0	0	0	0	0	0	0	500
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Il valore attuale V_0 delle tre rate da 100 euro è
$V_0 = 100 \, \dfrac{1 - 1.01^{-3}}{0.01} = 294.10.$

Al tempo $t = 4$, il valore attuale V_4 delle tre rate costanti di 300 euro è dato da
$V_4 = 300\,\dfrac{1 - 1.01^{-3}}{0.01} = 882.30$. Abbiamo ora la seguente scala temporale

Rate	0	0	0	0	$V_4 = 882.30$
t	0	1	2	3	4

Conseguentemente, il valore attuale di V_4 al tempo $t = 0$ è
$V_0^4 = \dfrac{V_4}{(1+i)^4} = \dfrac{882.30}{(1.01)^4} = 847.87.$
Al tempo $t = 0$, il valore attuale V_0^8 delle 500 euro è
$V_0^8 = \dfrac{500}{(1.01)^8} = 461.74$. Il valore attuale di tutti i capitali è la somma dei singoli valori attuali trovati ovvero:

$A = V_0 + V_0^4 + V_0^8 = 294.10 + 847.87 + 461.74 = 1603.71.$

Il montante al termine dell'ottavo anno è

$M = A(1 + i)^8 = 1603.71 \cdot 1.01^8 = 1736.59.$

Esempio 1.3.7

Si vuole estinguere un debito di 150.000 euro con 10 rate annuali costanti posticipate al tasso annuo del 4%.

a) Calcolare la rata;

b) dopo il pagamento della quarta rata, si chiede e si ottiene di non pagare la quinta e la sesta rata. Calcolare la nuova rata nel caso in cui il numero delle rate e il tasso restino invariati.

•

a) Si ha $R = D\,\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 150000\,\dfrac{0.04}{1-(1.04)^{-10}} = 18493.64.$
b) Denotando con R_{new} la nuova rata, si ha la seguente scala temporale

Rate	0	18493.64	18493.64	18493.64	18493.64	0	0	R_{new}	R_{new}	R_{new}	R_{new}
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Il valore attuale di tutte le rate deve uguagliare il debito.

Il valore V_0 delle prime 4 rate è

$V_0 = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 18493.64\,\dfrac{1-(1.04)^{-4}}{0.04} = 67129.98.$

Il valore V_6 al tempo $t = 6$ delle ultime 4 rate è

$V_6 = R_{new}\,\dfrac{1-(1.04)^{-4}}{0.04} = 3.6299R_{new}.$

Il valore attuale al tempo $t = 0$ di V_6 è $A_6 = \dfrac{3.6299R_{new}}{1.04^6} = 2.8688.$

Si deve avere $D = V_0 + A_6$, ovvero $150000 = 67129.98 + 2.8688R_{new}$ da cui $150000 - 67129.98 = 2.8688R_{new}$, $R_{new} = \dfrac{82870.02}{2.8688} = 28886.65.$

Esempio 1.3.8

Un debito D di 150000 euro è saldato in 10 anni al tasso nominale annuo mensile del 4% con rate costanti immediate posticipate. Calcolare la rata.

•

Essendo $j_{12} = 4\%$ si ha un tasso mensile effettivo $i_{12} = \dfrac{0.04}{12} = 0.0033333.$

Essendo il numero delle rate uguale a $10 \cdot 12 = 120$, si ha

$R = D\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 150000\,\dfrac{0.0033333}{1-(1.0033333)^{-120}} = 12772.48.$

Esempio 1.3.9

a) Determinare la rata R di una rendita di 45 annualità posticipate il cui valore attuale al tasso del 6% annuo è di 5254.98 euro;

b) determinare R nel caso di rendita anticipata.

•

a) Si ha $R = A\,\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 5254.98\,\dfrac{0.06}{1-(1.06)^{-45}} = 340.$

b) Nel caso di rendita anticipata si ha $R = \dfrac{340}{1.06} = 320.75.$

Esempio 1.3.10 il Sig. Rossi acquista a rate un computer Mac con prezzo di listino pari a 2500 euro. Il Sig. Rossi paga subito il 20% del prezzo e si impegna a saldare la rimanenza in 4 rate semestrali posticipate di ammontare R, calcolate in capitalizzazione composta al tasso annuo nominale convertibile 2 volte l'anno del 5%. Determinare l'importo R delle rate.

• Il 20% del prezzo è uguale a $2500 \cdot 0.2 = 500$ euro e quindi resta un debito di 2000 euro che viene pagato in 4 rate semestrali al tasso effettivo semestrale $i_2 = \frac{j_2}{2} = 2.5\%$. Ovviamente il debito rappresenta il valore attuale delle rate per cui risulta $R = A \dfrac{i_2}{1-(1+i_2)^{-n}} = 2000 \dfrac{0.025}{1-(1.025)^{-4}} = 531.64$

Esempio 1.3.11 Determinare il numero delle rate di una rendita annua posticipata di rata 135 euro il cui montante, al tasso effettivo annuo del 5%, è di euro 4122.77.

• Essendo $M = R \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, si ha $4122.77 = 135 \dfrac{(1.05)^n - 1}{0.05}$, da cui

$\dfrac{(1.05)^n - 1}{0.05} = \dfrac{4122.77}{135} = 30.3903704$,

$(1.05)^n = 30.3903704 \cdot 0.05 + 1 = 2.526952$.

Passando ai logaritmi si ha $\log(1.05)^n = \log 2.526952$ e quindi

$n = \dfrac{\log 2.526952}{\log(1.05)} = 19.$

Osservazione 1.3.2 Sul numero delle rate

Si deve saldare un debito di 150000 euro con rate costanti posticipate al 3.75%. Il sig. Rossi propone di pagare 500 euro annuali fino all'estinzione del debito. Con sua grande sorpresa la Banca gli comunica che questo è impossibile. Perchè? Vediamo quante rate sarebbero necessarie per accogliere la richiesta del Sig. Rossi.

Sappiamo che vale la relazione $D = \dfrac{R}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$, da cui

$150000 = \dfrac{500}{0.0375}\left[1-(1.0375)^{-n}\right]$.

Con semplici calcoli troviamo, progressivamente, $\dfrac{150000 \cdot 0.0375}{500} = 1-(1.0375)^{-n}$,

$11.25 = 1-(1.0375)^{-n}$,

$(1.0375)^{-n} = 1 - 11.25 = -10.25$. In quest'ultima equazione, il primo membro è sempre positivo essendo una potenza mentre il secondo membro è negativo e ciò assurdo.

Ne consegue che non è possibile estinguere il debito con sole 500 euro annue.

Una interpretazione di questo risultato sta nel fatto che una rata troppo bassa implica interessi molto alti che non si riesce a pagare con la rata.

Nasce allora il seguente quesito: noti il debito D e il tasso di interesse i, quali valori deve assumere una rata R per sanare il debito?

Si tratta di rifare il calcolo precedente in generale a partire dalla relazione $D = \frac{R}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$. Si ha $\frac{D \cdot i}{R} = 1-(1+i)^{-n}$, da cui $(1+i)^{-n} = 1 - \frac{D \cdot i}{R} = \frac{R - D \cdot i}{R}$. Essendo $(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$, capovolgendo ambo i membri otteniamo $(1+i)^n = \frac{R}{R - D \cdot i}$. Essendo il primo membro positivo per ogni valore di n, deve essere positivo anche il secondo membro, ovvero deve risultare $R - D \cdot i > 0$ da cui $R > D \cdot i$. Osservando che $D \cdot i$ è uguale all'interesse passivo dovuto alla fine del primo anno, possiamo affermare che per riuscire a estinguere un debito D al tasso di interesse annuo i in una rendita posticipata a rate costanti **la rata R deve essere maggiore dell'interesse passivo $D \cdot i$ dovuto alla fine del primo anno**.

Dalla relazione $(1+i)^n = \frac{R}{R - D \cdot i}$ si ottiene

$$n = \frac{\log \frac{R}{R - D \cdot i}}{\log(1+i)} \tag{1.3.5}$$

Si osservi che la condizione $R > D \cdot i$ si ottiene anche imponendo la condizione di positività sull'argomento del logaritmo $\log \frac{R}{R - D \cdot i}$.

Riprendendo l'esempio numerico iniziale, si ha $R = 500$, $D = 150000$, $i = 3.75\%$ per cui la condizione $R > D \cdot i$ che diviene $500 > 150000 \cdot 0.0375 = 5625$ non è verificata.

Una rata R con un appropriato numero di rate estingue il debito se $R > 5625$.

Esempio 1.3.12 Un debito di 200000 euro è estinto, al tasso di interesse annuo del 3%, con rate costanti posticipate uguali a :

a) $R = 6000$; b) $R = 8000$; c) $R = 10000$, d) $R = 12000$.

1) Dire se è possibile a priori estinguere il debito in ciascun caso;

2) calcolare il numero delle rate nei casi possibili;

3) interpretare i valori ottenuti degli anni.

•

1) Nel caso a) la condizione $R > D \cdot i$ che diviene $6000 > 200000 \cdot 0.03 = 6000$ non è verificata, quindi non è possibile estinguere il debito.

Nel caso b) la condizione $R > D \cdot i$ che diviene $8000 > 200000 \cdot 0.03 = 6000$ è verificata e quindi è possibile estinguere il debito.

Nel caso c) la condizione $R > D \cdot i$ che diviene $10000 > 200000 \cdot 0.03 = 6000$ è verificata, quindi è possibile estinguere il debito.

Nel caso d) la condizione $R > D \cdot i$ che diviene $12000 > 200000 \cdot 0.03 = 6000$ è verificata, quindi è possibile estinguere il debito.

2)

b) Si ha $n = \dfrac{\log \dfrac{8000}{8000 - 20000 \cdot 0.03}}{\log(1.03)} = \dfrac{\log \dfrac{8000}{7400}}{\log(1.03)} = 2.64$ anni, ovvero 2 anni, 7 mesi, 20 giorni.

c) Si ha $n = \dfrac{\log \dfrac{10000}{10000 - 20000 \cdot 0.03}}{\log(1.03)} = \dfrac{\log \dfrac{10000}{9400}}{\log(1.03)} = 2.09$ anni, ovvero 2 anni, 1 mese, 4 giorni.

c) Si ha $n = \dfrac{\log \dfrac{12000}{12000 - 20000 \cdot 0.03}}{\log(1.03)} = \dfrac{\log \dfrac{12000}{11400}}{\log(1.03)} = 1.74$ anni, ovvero 1 anno, 8 mesi, 25 giorni.

3) I tempi sono decrescenti in quanto pagando di più (rate crescenti) gli interessi diminuiscono e il debito si estingue più velocemente.

1.3.1 Leasing

Con un contratto leasing non si acquista direttamente il bene ma lo si prende in affitto, pagando un canone (mensile o altro) per un certo periodo di tempo; al termine del periodo si ha la facoltà di acquisire il bene pagando un **prezzo** (o **valore**) **di riscatto** o di restituire il bene ricevendo il valore di riscatto. Gli elementi principali del contratto di leasing sono:

•. Il costo del bene corrispondente al valore attuale;

• La rata R costante da pagare periodicamente che può essere posticipata o anticipata;

• il numero n delle rate da pagare;

• il tasso di interesse;

• il valore di riscatto V_r che può essere espresso direttamente o come percentuale del costo del bene.

Nel caso di rate posticipate si ha

$$A = \frac{R}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right] + V_r(1+i)^{-n} \tag{1.3.6}$$

Esempio 1.3.13 Un contratto di leasing per un impianto di un'impresa prevede il pagamento di 15 rate annuali posticipate. L'impianto costa 100000 euro, il valore di riscatto è di 10000 euro e il tasso di interesse sul mercato è del 3%. Calcolare l'ammontare della rata.

• Applicando la (1.3.6), si ha

$$100000 = \frac{R}{0.03}\left[1-(1.03)^{-15}\right] + 10000(1.03)^{-15}$$

Essendo $(1.03)^{-15} = 0.6418619, \quad 1-(1.03)^{-15} = 0.358138$, si ha

$$100000 = \frac{R}{0.03} \cdot 0.358138 + 0.6418619 \cdot 10000$$

da cui $\dfrac{R}{0.03} = \dfrac{100000 - 6418.619}{0.358138} = 261299.78.$
Infine $R = 261299.78 \cdot 0.03 = 7838.99.$

Esempio 1.3.14 Un contratto di leasing per l'acquisto di un'auto dal valore di 20000 euro prevede il pagamento di 10 rate annuali posticipate di 1500 euro l'una. Il tasso di interesse annuo sul mercato è del 5%.
Calcolare il valore di riscatto.
• Applicando la (1.3.6), si ha

$$20000 = \frac{1500}{0.05}\left[1-(1.05)^{-10}\right] + V_r(1.05)^{-10}$$

Essendo $(1.05)^{-10} = 0.6139133, \quad 1-(1.03)^{-15} = 0.3860866$, si ha

$$20000 = 30000 \cdot 0.3860866 + 0.6139133 \cdot V_r$$

da cui $V_r = 13711.06$.

Esempio 1.3.15 Si acquista un'auto a 20000 euro finanziata con un leasing di n rate costanti posticipate di 1500 euro ciascuna al tasso del 5% e valore di riscatto $V_r = 8171.25$.
Calcolare n.
•
Applicando la (1.3.6), si ha

$$20000 = \frac{1500}{0.05}\left[1-(1.05)^{-n}\right] + 8171.25(1.05)^{-n}$$

Poniamo $X = (1.05)^{-n}$. Si ottiene

$$20000 = 30000\left[1-X\right] + 8171.25X; \quad 20000 = 30000 - 30000X + 8171.25X$$

da cui $10000 = 21828.75X, \quad X = 0.4581114.$
Sostituendo si ha $0.4581114 = (1.05)^{-n}$, da cui $-n = \dfrac{\log 0.4581114}{\log 1.05} = -16$
e quindi $n = 16$.

1.3.2 Esercizi sulle rendite

Esercizio 1.3.1

Calcolare il valore attuale e il montante di una successione di 8 pagamenti trimestrali posticipati di 500 euro ciascuno, al tasso annuo del 7%.

• $i_4 = 1.7\%$; $A = 3710.56$; $M = 4246.26$.

Esercizio 1.3.2

Calcolare il valore attuale e il montante di una successione di 20 pagamenti semestrali posticipati di 800 euro ciascuno, al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6%.

• $j_4 = 6\%$, $i_4 = 1.5\%$, $i_2 = 3.022\%$. $A = 11879.22$, $M = 21547.03$

Esercizio 1.3.3

Risolvere i due esercizi precedenti nel caso di pagamenti anticipati.

•

1) $A = 3773.64$; $M = 4318.45$.

2) $A = 12238.21$, $M = 22198.18$

Esercizio 1.3.4

Calcolare l'ammontare di un debito che deve essere estinto dietro pagamento di 15 rate semestrali costanti posticipate di 700 euro al tasso annuo del 7.5%.

• $i_2 = 3.6822$; $A = 7958.72$.

Esercizio 1.3.5

Si chiede un prestito di 100000 euro, da restituire con rate semestrali costanti posticipate, ad una Banca che pratica un tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 10%.

Calcolare la rata per una durata del prestito:

a) decennale; b) ventennale; c) trentennale.

•

$j_2 = 10\%$, $i_2 = 5\%$.

a) $R = 8024.26$; b) $R = 5827.82$; c) $R = 5282.82$.

Esercizio 1.3.6

Risolvere i due esercizi precedenti nel caso di pagamenti anticipati.

• 1) $A = 8251.78$.

2) $R = 12333.77$; b) $R = 7642.15$; c) $R = 6195.37$.

Esercizio 1.3.7

Determinare il valore attuale di una rendita posticipata costituita da 20 rate trimestrali di 2500 euro ciascuna, al tasso nominale annuo del 6.4% convertibile trimestralmente.

•

$i_4 = 0.016$; $A = 42501.45$.

Esercizio 1.3.8

Determinare il valore attuale di una rendita anticipata costituita da 8 rate trimestrali di 3000 euro ciascuna, al tasso annuo del 6.5%.

•

$i_4 = 0.01587$; $A = 22372.90$.

Esercizio 1.3.9

Determinare il valore attuale di una rendita posticipata il cui primo pagamento avviene fra tre anni, costituita da 12 rate annuali di 1500 euro al tasso annuo del 6%.

•

$A = 11192.39$.

Esercizio 1.3.10

In un periodo temporale di 9 anni vengono versate 5 rate costanti di 150 euro ai tempi $t = 3, 4, 5, 6, 7$. Calcolare il valore attuale dei versamenti e il montante al termine del nono anno al tasso annuo del 2.5%.

•

$A = 663.29$; $M = 828.36$.

Esercizio 1.3.11

In un periodo temporale di 8 anni vengono versate tre rate costanti di 500 euro ai tempi $t = 1, 2, 3$ e tre rate costanti di 600 euro ai tempi $t = 6, 7, 8$. Calcolare il valore attuale dei versamenti e il montante al termine dell'ottavo anno al tasso annuo del 2.5%.

•

Valore al tempo $t = 0$ delle prime tre rate $V_0 = 1428.01$;
Valore al tempo $t = 0$ delle tre rate successive $V_0^{(1)} = 1514.59$.
Valore attuale $A = 2943.60$; $M = 3586.49$.

Esercizio 1.3.12 Un debito di 100000 euro è estinto, al tasso di interesse annuo del 4%, con rate costanti posticipate uguali a :
a) $R = 3000$; b) $R = 5000$; c) $R = 10000$, d) $R = 15000$.

1) Dire se è possibile a priori estinguere il debito in ciascun caso;

2) calcolare il numero delle rate nei casi possibili.

•

1) Si deve verificare la condizione $R > D \cdot i$.

le rate in b), c), d) sono compatibili a differenza della rata in a).

2)

Sappiamo che

$$n = \frac{\log \dfrac{R}{R - D \cdot i}}{\log(1+i)}$$

b) Si ha $n = \dfrac{\log \dfrac{5000}{5000 - 100000 \cdot 0.04}}{\log(1.04)} = \dfrac{\log \dfrac{5000}{1000}}{\log(1.04)} = 41$ anni.

c) Si ha $n = \dfrac{\log \dfrac{10000}{10000 - 100000 \cdot 0.04}}{\log(1.04)} = \dfrac{\log \dfrac{10000}{6000}}{\log(1.04)} = 13$ anni.

d) Si ha $n = \dfrac{\log \dfrac{15000}{15000 - 100000 \cdot 0.04}}{\log(1.04)} = \dfrac{\log \dfrac{15000}{11000}}{\log(1.04)} = 7.91$ anni, ovvero 7 anni, 10 mesi, 27 giorni.

Esercizio 1.3.13 Un contratto di leasing per una attrezzatura industriale dal costo di 60000 euro, prevede il pagamento all'acquisto di 15000 euro, versamento di canoni mensili posticipati per 4 anni e un valore di riscatto pari al 5% del costo dell'attrezzatura il tasso di interesse mensile sul mercato è del 1.2284%.

Calcolare l'ammontare del canone mensile.

• R= 1200.23

Esercizio 1.3.14 Un contratto di leasing per l'acquisto di un'auto dal valore di 12000 euro prevede il pagamento di 24 rate mensili posticipate. Il valore di riscatto è di 5000 euro. Il tasso di interesse mensile sul mercato è del 0.1%.

Calcolare l'ammontare della rata.

• R= 300.33

Esercizio 1.3.15 Un contratto di leasing per l'acquisto di una fotocopiatrice dal valore di 10000 euro prevede il pagamento di 4 rate semestrali. Il valore di riscatto è di 4000 euro. Il tasso di interesse annuale sul mercato è del 3.0225%. Calcolare l'ammontare della rata.

• Si ha $i_2 = 1.5\%$; $R = 1616.67$

1.4 Criteri di scelta tra operazioni finanziarie

Sempre più spesso nella vita reale ci si trova ad affrontare problemi di scelta tra due o più operazioni finanziarie. Più precisamente considereremo:
operazioni di investimento nelle quali si esborsa all'inizio una somma e si riceve in cambio altre somme a scadenze prefissate;
operazioni di finanziamento nelle quali si riceve all'inizio una somma da restituire con altre somme a scadenze prefissate.
La sequenza di capitali coinvolti in una operazione finanziaria è detta successione di flussi di cassa dove i flussi positivi rappresentano delle entrate mentre quelli negativi rappresentano delle uscite.
Ad esempio, il quadro seguente rappresenta una operazione di **investimento** in quanto il primo flusso è negativo e gli altri positivi. Il significato è: investo oggi 3000 euro e ricevo 2550 euro al tempo 1 e 630 euro al tempo 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & 2550 & 630 \end{pmatrix}$$

Ovviamente, cambiando il segno a tutti i flussi, si perviene a una operazione di finanziamento.
Il problema che si pone quando abbiamo più proposte di investimento o di finanziamento è quello della scelta tra le proposte fatte.
Presenteremo al riguardo due criteri di scelta: il REA e il TIR.

1.4.1 Il rendimento economico attualizzato

Il rendimento economico attualizzato (REA) di un progetto finanziario è il valore attuale dei suoi flussi di cassa calcolato rispetto ad un tasso di valutazione prefissato.

Per esempio, il REA del progetto A rispetto al tasso di valutazione del 4%è
$REA = -3000 + \frac{2550}{1.04} + \frac{630}{(1.04)^2} = 34.39.$
Il tasso di valutazione è soggettivo per ogni operatore economico che può riferirsi ai tassi di mercato, ai tassi di interesse bancari o ad altro come ad esempio:
il prime rate (tasso privilegiato d'interesse che le banche praticano nei prestiti ai loro clienti più solidi e per depositi di una certa entità);
Il tasso ufficiale di sconto (il tasso con cui la Banca centrale concede prestiti alle altre banche);
il tasso interbancario (tasso di interesse medio delle transazioni finanziarie in Euro tra le principali banche europee come l'Euribor);
il tasso di interesse di mercato (market rate of interest): nel mercato monetario, è il tasso d'interesse prodotto dall'interazione tra soggetti che domandano fondi e soggetti che al contrario ricercano finanziamenti;
o qualsiasi altro tasso ritenuto idoneo per il confronto.
Rispetto al REA, la scelta migliore tra due investimenti risulta, sia per gli investimenti sia per i finanziamenti, quella con il REA più elevato.

Esempio 1.4.1 Valutare i seguenti progetti finanziari sulla base del criterio del REA, utilizzando il tasso $i = 0,04$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & 2550 & 630 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & 2280 & 931,6 \end{pmatrix}$$

- REA del progetto A: $REA_A = -3000 + \frac{2550}{1.04} + \frac{630}{(1.04)^2} = 34.39.$
- REA del progetto B: $REA_B = -3000 + \frac{2280}{1.04} + \frac{931.6}{(1.04)^2} = 53.62.$

Essendo $REA_B > REA_A$, il progetto B è preferibile al progetto A.

Rispetto al criterio del REA mettiamo in evidenza alcuni aspetti:

• **Aspetto positivo**

il criterio di valutazione è molto semplice da applicare: si tratta di calcolare una sequenza di valori attuali e sommarli tra loro;

• **Aspetto negativo**

se i vari flussi avvengono in tempi lunghi, il criterio di valutazione non è molto attendibile in quanto nel tempo i tassi possono variare (cosa che accade spesso in pratica);

• **Scelta dipendente dal tasso applicato**

Riprendiamo in esame l'esempio precedente, valutando i due progetti finanziari sulla base del criterio del REA, utilizzando il tasso di nteresse annuo $i = 15\%$.

Si ha:

• REA del progetto A: $-3000 + \dfrac{2550}{1.15} + \dfrac{630}{(1.15)^2} = -3000 + 2217.39 + 476.37 = -306.24$.

• REA del progetto B: $-3000 + \dfrac{2280}{1.15} + \dfrac{931.6}{(1.15)^2} = -3000 + 1982.61 + 704.42 = -312.97$.

Essendo $REA_A > REA_B$, il progetto A è preferibile al progetto B.

Tutto questo significa che per certi tassi si preferisce il progetto B e per certi tassi si preferisce il progetto A.

Rispetto ai due esempi svolti, risolviamo il quesito generale:

per quale valore dell'interesse i il progetto A è preferibile al progetto B e viceversa?

Calcoliamo il REA dei due progetti:

$REA_A = -3000 + \dfrac{2550}{1+i} + \dfrac{630}{(1+i)^2}$;

$REA_B = -3000 + \dfrac{2280}{1+i} + \dfrac{931.6}{(1+i)^2}$;

Si ha REA di A $>$ REA di B se e solo se

$-3000+\dfrac{2550}{1+i}+\dfrac{630}{(1+i)^2}>-3000+\dfrac{2280}{1+i}+\dfrac{931.6}{(1+i)^2}$, da cui
$\dfrac{2550}{1+i}+\dfrac{630}{(1+i)^2}>\dfrac{2280}{1+i}+\dfrac{931.6}{(1+i)^2}$.
Moltiplicando ambo i membri della disequazione per $(1+i)^2$ si ottiene

$2550(1+i)+630>2280(1+i)+931.6$,

$2550+2550i+630>2280+2280i+931.6$,

$2550i-2280i>-2550-630+2280+931.6$,

$270i>31.6$ e infine $i>11.7\%$.

Conclusione: se il tasso applicato supera 11.7%, il progetto A è preferibile al progetto B, se il tasso applicato è inferiore a 11.7%, il progetto B è preferibile al progetto A.

1.4.2 Esercizi

Esercizio 1.4.1 Una operazione finanziaria comporta una entrata di cassa immediata di 1000 euro, una uscita di 2000 euro tra 1 anno e un'uscita di 1000 euro tra 2 anni. Calcolare il REA dell'operazione nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato sia del 10% annuo.

• REA=-1644.63

Esercizio 1.4.2 Un'operazione finanziaria comporta un'uscita di cassa immediata di 2000 euro e due entrate, entrambe di 1500 euro, rispettivamente tra 6 mesi e tra 1 anno. Calcolare il REA dell'operazione nell'ipotesi che il tasso di interesse utilizzato sia del 5% annuo.

• REA=892.42

Esercizio 1.4.3

a) Valutare i seguenti progetti finanziari sulla base del criterio del REA, utilizzando il tasso del $i = 1.5\%$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -10000 & 4000 & 8000 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -10000 & 4500 & 7480 \end{pmatrix}$$

b) Verificare per quali valori del tasso di interesse il REA del progetto A è preferibile al REA del progetto B.

•

a) $REA_A = -10000 + \dfrac{4000}{1.015} + \dfrac{8000}{(1.015)^2} = 1706.18;$
$= REA_B - 10000 + \dfrac{4500}{1.015} + \dfrac{7480}{(1.015)^2} = 1694.05.$
Essendo $REA_A > REA_B$, il progetto A è preferibile al progetto B.

b) Denotando con i il tasso di interesse si ha $REA_A > REA_B$ quando $-10000 + \dfrac{4000}{1+i} + \dfrac{8000}{(1+i)^2} > -10000 + \dfrac{4500}{1+i} + \dfrac{7480}{(1+i)^2}$. Moltiplicando ambo i membri per $(1+i)^2$, si ottiene $4000(1+i) + 8000 > 4500(1+i) + 7480$, da cui $500(1+i) < 520$, $1+i < 1.04$ e infine $i < 0.04 = 4\%$. Conclusione: per tassi inferiori al 4%, il progetto A è preferibile al progetto B, per tassi superiori il progetto B è preferibile al progetto A.

Esercizio 1.4.4

a) Valutare i seguenti progetti finanziari sulla base del criterio del REA, utilizzando il tasso del $i = 3\%$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6000 & 2500 & 4000 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6000 & 2800 & 3400 \end{pmatrix}$$

b) Verificare che per qualunque tasso di tasso di interesse il REA del progetto A è preferibile al REA del progetto B.

•

a) $REA_A = -6000 + \dfrac{2500}{1.03} + \dfrac{4000}{(1.03)^2} = 197.57;$
$= REA_B - 6000 + \dfrac{2800}{1.03} + \dfrac{3400}{(1.03)^2} = -76.73.$
Essendo $REA_A > REA_B$, il progetto B è preferibile al progetto A.

b) Denotando con i il tasso di interesse si ha $REA_A > REA_B$ quando $-6000 + \dfrac{2500}{1+i} + \dfrac{4000}{(1+i)^2} > -6000 + \dfrac{2800}{1+i} + \dfrac{3400}{(1+i)^2}$. Moltiplicando ambo i membri per $(1+i)^2$, si ottiene $2500(1+i) + 4000 > 2800(1+i) + 3400$, da cui $300(1+i) < 600$, $1+i < 2$ e infine $i < 1$. Quest'ultima disuguaglianza è sempre verificata per cui si ha sempre $REA_A > REA_B$.

Esercizio 1.4.5

Siano dati i seguenti progetti finanziari

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & 2550 & 630 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & X & 931,6 \end{pmatrix}$$

a) Sulla base del criterio del R.E.A., determinare per quali valori di X il progetto A è strettamente preferito al progetto B. (Utilizzare il tasso $i = 0,04$.)

• $X < 2260$.

1.4.3 Il tasso interno di rendimento (TIR)

In corrispondenza del progetto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -A & B & C \end{pmatrix}$$

chiameremo **tasso interno di rendimento (TIR) il tasso di valutazione in corrispondenza del quale il valore attuale dei flussi di cassa è nullo**, ovvero il tasso di interesse che rende equa l'operazione finanziaria rispetto alla capitalizzazione composta; può essere interpretato come misura del rendimento di un investimento o del costo di un finanziamento.

Denotato con i il tasso annuo corrispondente al TIR si deve avere

$$-A + \frac{B}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} = 0; \quad ovvero \quad A = \frac{B}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2}$$

Ovviamente:

Tra due progetti di finanziamento si sceglie quello con il TIR minore;

tra due progetti di investimento si sceglie quello con il TIR maggiore.

Osservazione 1.4.1 Si osservi che il TAN definito su un singolo progetto finanziario coincide con il tasso interno di rendimento così come il TAEG risulta il tasso interno di rendimento di un progetto che tiene conto delle spese accessorie.

Esempio 1.4.2 Valutare i seguenti progetti finanziari sulla base del criterio del TIR, ove i tempi sono espressi in anni.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & 2550 & 630 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3000 & 2280 & 931,6 \end{pmatrix}$$

• Denotiamo con i_A il TIR del progetto A. Deve risultare
$3000 = \dfrac{2550}{1+i_A} + \dfrac{630}{(1+i_A)^2}$.
Posto $x = 1 + i_A$, si perviene all'equazione $3000x^2 - 2550x - 630 = 0$, da cui $x_1 = -0.2$, $x_2 = 1.05$. Dalla prima soluzione si ha un tasso negativo inaccettabile, mentre dalla seconda si ha $i_A = 0.05 = 5\%$.

• Denotiamo con i_B il TIR del progetto B. Deve risultare
$3000 = \dfrac{2280}{1+i_B} + \dfrac{931.6}{(1+i_B)^2}$.
Posto $x = 1 + i_B$, si perviene all'equazione $3000x^2 - 2280x - 931.6 = 0$, da cui $x_1 = -0.2$, $x_2 = 1.0545$. Dalla prima soluzione si ha un tasso negativo inaccettabile, mentre dalla seconda si ha $i_B = 0.0545 = 5,45\%$.

Essendo il progetto un investimento, il progetto B è preferibile al progetto A.

1.4.4 Esercizi

Esercizio 1.4.6

Un soggetto deve scegliere tra due operazioni di investimento. L'operazione A origina una uscita di cassa immediata di 60000 euro e due entrate, rispettivamente di 30000 euro dopo 1 anno e di 40000 euro dopo 2 anni, mentre l'operazione B origina una uscita di cassa immediata di 60000 euro e due entrate, rispettivamente di 40000 euro dopo 1 anno e di 36000 euro dopo 2 anni.
Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del TIR.
• $TIR_A = 10.39\%$; $TIR_B = 17.66\%$.
Essendo un investimento si sceglie l'operazione B.

Esercizio 1.4.7

Un soggetto deve scegliere tra due operazioni di finanziamento. L'operazione A origina un'entrata di cassa immediata di 15000 euro e due uscite, rispettivamente di 12000 euro dopo 1 anno e di 6000 euro dopo 2 anni, mentre l'operazione B origina un'entrata di cassa immediata di 15000 euro e due uscite, rispettivamente di 9000 euro dopo 1 anno e di 9000 euro dopo 2 anni. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del TIR.
• $TIR_A = 14.83\%$; $TIR_B = 13.07\%$.
Essendo un finanziamento si sceglie l'operazione A.

Esercizio 1.4.8

Un soggetto deve scegliere tra due operazioni di investimento. L'operazione A origina un'uscita di cassa immediata di 10000 euro e due entrate, rispettivamente di 6000 euro dopo 1 anno e di 7200 euro dopo 2 anni, mentre l'operazione B origina un'uscita di cassa immediata di 10000 euro e due entrate, rispettivamente di 6500 euro dopo 1 anno e di 8450 euro dopo 2 anni. Determinare l'operazione scelta dal soggetto nell'ipotesi che egli valuti utilizzando il criterio del TIR.

• Si ha $TIR_A = 20\%$¡ $TIR_B = 30\%$; poichè si tratta di due operazioni di investimento, il soggetto sceglie l'operazione B.

Esercizio 1.4.9

Dire per quale valore di X il TIR della operazione B risulta 1/2 del TIR della prima operazione: A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -500 & 300 & 220 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -500 & X & 420 \end{pmatrix}$

• Si ha $TIR_A = 2.8\%$. Si perviene all'equazione $500(1.014)^2 - X(1.014) - 420 = 0$, da cui $X = 92.80$.

Esercizio 1.4.10

Dire per quale valore di X le seguenti operazioni hanno lo stesso TIR:
A=$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ -500, & 220, & 300 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ -500, & X, & 2X \end{pmatrix}$

• Si ha $TIR_A = 2.5\%$. Si perviene all'equazione $500(1.025)^2 - X(1.025) - 2X = 0$, da cui $X = 173.66$.

Esercizio 1.4.11

Dire per quale valore di X il TIR della operazione B supera dello 0,5% il TIR della seconda operazione
A=$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ -500, & 250, & 280 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ -500, & X, & 420 \end{pmatrix}$

• X=311.27

Esercizio 1.4.12

Dire per quale valore di X il TIR della operazione B risulta i 3/2 del TIR della operazione A

A=$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ -500, & 300, & 220 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ -500, & X, & 220 \end{pmatrix}$

- X=929.85

1.4.5 Il TAN e il TAEG

In questi ultimi tempi appaiono frequentemente su giornali e riviste proposte di finanziamento nelle quali vengono indicati il TAN (Tasso Annuo Nominale Effettivo) e il TAEG (Tasso Annuo Effettivo Globale).

Vediamo di cosa si tratta con un esempio.

Un debito di 3000 *euro viene rimborsare con due rate trimestrali, la prima di 1500 euro e la seconda di 1700 euro.*

Quale interesse "implicito" è stato applicato nell'operazione finanziaria?

Denotiamo con i l'ipotetico tasso annuo applicato.

Il valore attuale delle rate da rimborsare è dato da $\frac{1500}{1+i}+\frac{1700}{(1+i)^2}$ e, nel principio dell'equivalenza finanziaria, si deve avere $3000=\frac{1500}{1+i}+\frac{1700}{(1+i)^2}$, da cui $3000(1+i)^2-1500(1+i)-1700=0$. Posto $x=1+i$, si perviene all'equazione di secondo grado $3000x^2-1500x-1700=0$, che ha per soluzioni $\frac{1500\pm\sqrt{1500^2+4\cdot 1700\cdot 3000}}{6000}$, da cui $x_1=-0.54=1+i$, $x_2=1.043=1+i$.

Dalla prima soluzione si ha un tasso negativo inaccettabile, mentre dalla seconda si ha $i=0.043=4.3\%$.

Il tasso annuo applicato è quindi 4.3%. Tale tasso è il TAN cercato.

In una operazione finanziaria del tipo sopra descritto, **il TAN è quel tasso annuo che rende uguali il debito contratto e il valore attuale delle rate da pagare**.

Supponiamo adesso che la precedente operazione finanziaria avvenga con la seguente modalità:

per spese amministrative si chiedono 20 euro alla consegna delle 3000 euro e 1 euro per ogni rata.

In questo nuovo caso nel calcolo del tasso si devono valutare le spese aggiuntive.

Al tempo zero si riceve in realtà non 3000 euro ma 3000-20 = 2980 euro e le rate divengono, rispettivamente, di 1501 euro e di 1701 euro.

Si ha così l'equazione $2980x^2 - 1501x - 1701 = 0$, che ha per soluzioni $\dfrac{1501 \pm \sqrt{1501^2 + 4 \cdot 1701 \cdot 2980}}{5960}$, da cui $x_1 = -0.55 = 1 + i$, $x_2 = 1.048 = 1 + i$.

dalla prima soluzione si ha un tasso negativo inaccettabile, mentre dalla seconda si ha $i = 0.048 = 4.8\%$.

Il tasso annuo applicato è quindi 4.8%. Tale tasso è il TAEG dell'operazione finanziaria.

Il TAEG rappresenta quindi il TAN dell'operazione, tenendo conto degli oneri accessori ad essa collegati. Per una stessa operazione (che comporta il sostenimento di spese accessorie) risulta sempre $TAEG > TAN$.

Osservazione 1.4.2 Il valore del TAEG è fortemente influenzato dalle spese accessorie iniziali dovute alla istruzione della pratica.

Consideriamo infatti l'esempio precedente supponendo che le spese amministrative richiedano 80 euro alla consegna delle 3000 euro e non vi sia altra spesa accessoria.

Al tempo zero si riceve 3000 euro ma 3000-80 = 2920, con rate che restano invariate a 1500 euro e di 1700 euro.

Si perviene all'equazione $2920x^2 - 1500x - 1700 = 0$, equivalente a

$292x^2 - 150x - 170 = 0$, che ha per soluzioni $\dfrac{150 \pm \sqrt{150^2 + 4 \cdot 170 \cdot 292}}{584}$, da cui $x_1 = -1.84 = 1 + i$, $x_2 = 1.06 = 1 + i$.

dalla prima soluzione si ha un tasso negativo inaccettabile, mentre dalla seconda si ha $i = 0.06 = 6\%$ il che significa che ad un aumento di 60 euro iniziali di spese pratica corrisponde un aumento percentuale del TAEG del 1.2%!

Osservazione 1.4.3 Risulta chiaramente che in una operazione finanziaria è il TAEG che va preso come riferimento e non il TAN.
Per riconfermare questo aspetto considereremo due investimenti
A e B con $TAN_A < TAN_B$ e con $TAEG_A > TAEG_B$.
Ciò significa che se si deve effettuare una scelta col criterio del TAN, B è il favorito; se si deve invece effettuare una scelta col criterio del TAEG, A è il favorito.
Ovviamente si sceglie A in quanto quello che conta in una operazione di finanziamento è il TAEG.
Verifichiamo le asserzioni fatte relative ai confronti tra TAN e TAEG.
• Si ha un debito di 5000 euro e due opzioni:
A) rimborsare il debito con due rate annuali, la prima di 3000 euro e la seconda di 2500 euro con 700 euro di spese pratica iniziali e di 10 euro per ogni rata;
B) rimborsare il debito con due rate annuali, la prima di 3500 euro e la seconda di 2000 euro con 300 euro di spese pratica iniziali e di 5 euro per ogni rata.
Calcoliamo il TAN delle due opzioni:
TAN_A: deve risultare $5000 = \dfrac{3000}{1+i} + \dfrac{2500}{(1+i)^2}$; con i consueti calcoli si trova TAN_A= 6.81%.
TAN_B: deve risultare $5000 = \dfrac{3500}{1+i} + \dfrac{2000}{(1+i)^2}$; si trova TAN_B= 7.28% per cui $TAN_A < TAN_B$.
Calcoliamo adesso i TAEG dei due investimenti:
$TAEG_A$: deve risultare $5000 - 700 = \dfrac{3010}{1+i} + \dfrac{2510}{(1+i)^2}$; con i consueti calcoli si trova $TAEG_A$= 19%.
$TAEG_B$: deve risultare $5000 - 300 = \dfrac{3505}{1+i} + \dfrac{2005}{(1+i)^2}$; si trova TEG_B= 12.50% per cui $TAEG_A > TAEG_B$.

1.4.6 Esercizi

Esercizio 1.4.13

Per l'acquisto di uno scooter del prezzo di 4.000 euro vengono proposti i due seguenti finanziamenti:

a) 1.700 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 1.260 euro, senza alcuna spesa iniziale di istruzione della pratica di finanziamento e senza alcuna spesa obbligatoria al pagamento delle rate;

b) 1.000 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 1.600 euro, con 100 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 20 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.

Calcolare il TAN ed il TAEG delle due proposte di finanziamento e dire quale è la più conveniente, motivando opportunamente la risposta.

•

$TAN_A = TAEGA = 6.31\%$; $TAN_A = 4.41\%$, $TAEG_B = 7.72\%$.

La proposta A è la più conveniente.

Esercizio 1.4.14

Per l'acquisto di una auto del prezzo di 17000 euro viene proposto il seguente finanziamento:

1000 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 9800 euro, con 40 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 10 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.

Calcolare il TAN ed il TAEG della proposta di finanziamento.

• $TAN = 14.67\%$; $TAEG = 14.94\%$.

Esercizio 1.4.15

Per ottenere un prestito di 4.000 euro viene proposto il seguente finanziamento: 1500 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali rispettivamente di 1800 e di 2000 euro, con 30 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 10 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.
Calcolare il TAN ed il TAEG della proposta di finanziamento.
$TAN = 32.4\%$; $TAEG = 34\%$.

Esercizio 1.4.16

Per l'acquisto di una moto del prezzo di 5.000 euro viene proposto il seguente finanziamento:
1500 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 1.800 euro, con 50 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 10 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.
Calcolare il TAN ed il TAEG della proposta di finanziamento.
$TAN = 1.9\%$; $TAEG = 3.2\%$.

Esercizio 1.4.17

Per l'acquisto di uno scooter del prezzo di 4.000 euro vengono proposti i due seguenti finanziamenti:
a) 1.700 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 1.260 euro, senza alcuna spesa iniziale di istruzione della pratica di finanziamento e senza alcuna spesa obbligatoria al pagamento delle rate;
b) 1.000 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 1.600 euro, con 100 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 20 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.
Calcolare il TAN ed il TAEG delle due proposte di finanziamento e dire quale è la più conveniente, motivando opportunamente la risposta.

•

$TAN_A = TAEGA = 6.31\%$; $TAN_A = 4.41\%$, $TAEG_B = 7.72\%$.

La proposta A è la più conveniente.

Esercizio 1.4.18

Per l'acquisto di una auto del prezzo di 17000 euro viene proposto il seguente finanziamento:

1000 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 9800 euro, con 40 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 10 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.

Calcolare il TAN ed il TAEG della proposta di finanziamento.

• $TAN = 14.67\%$; $TAEG = 14.94\%$.

Esercizio 1.4.19 Per ottenere un prestito di 4.000 euro viene proposto il seguente finanziamento:

1500 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali rispettivamente di 1800 e di 2000 euro, con 30 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 10 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.

Calcolare il TAN ed il TAEG della proposta di finanziamento.

$TAN = 32.4\%$; $TAEG = 34\%$.

Esercizio 1.4.20 Per l'acquisto di una moto del prezzo di 5.000 euro viene proposto il seguente finanziamento:

1500 euro al momento dell'acquisto, più due rate annuali immediate posticipate di 1.800 euro, con 50 euro di spese iniziali di istruzione della pratica di finanziamento e 10 euro di spese obbligatorie al pagamento delle rate.

Calcolare il TAN ed il TAEG della proposta di finanziamento.

$TAN = 1.9\%$; $TAEG = 3.2\%$.

1.5 Ammortamenti

1.5.1 Generalità

Col termine **ammortamento** si intende *l'estinzione graduale di un debito.*
Ammortamento di prestiti indivisi significa che il debito è contratto con un solo creditore.
Il complesso delle norme che regolano il rimborso di un prestito costituisce la legge di ammortamento del prestito; tali norme devono contenere: l'importo del prestito, la durata di estinzione del prestito, il tasso di interesse applicato dal creditore, la scadenza delle rate e il loro importo.
Ogni rata è comprensiva di due quote: una **quota interesse** e una **quota capitale**.
Il principio generale dell'estinzione del debito avviene secondo la seguente logica:
"ti presto 1000 euro al tasso annuo del 5% da restituire in tre anni;
se tu al termine del primo anno mi dai 400 euro, ti dico che $1000 \cdot 0.05 = 50$ euro sono l'interesse che mi è dovuto e che 350 euro (quota capitale) vanno a scalare il tuo debito che diviene di 650 euro (textbfdebito residuo);
se tu al termine del secondo anno mi dai 400 euro, ti dico che $650 \cdot 0.05 = 32.50$ euro sono l'interesse che mi è dovuto e che 400 - 32.50 = 367.50 euro vanno a scalare il tuo debito che diviene di 650 - 367 = 283 euro, e così via".

- *Notazioni*
  - A è l'importo del debito;
  - $R_1, R_2, ..., R_{k-1}, R_k, R_{k+1}, ...R_n$ sono le rate da pagare;
  - $t_1, t_2, ..., t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, ...t_n$ sono le scadenze delle rate da pagare;

- $E_K, k = 1, 2, ..., n$, è il debito estinto al termine del k-mo periodo;
- $D_K, k = 1, 2, ..., n$, è il debito residuo al termine del k-mo periodo.

• **Relazioni**

- $A = E_k + D_k$ per ogni k; $A = C_1 + C_2 + ... + C_n$;
- $I_k + C_k = R_k,\ k = 1, 2, ..., n$;
- $I_k = i \cdot D_{k-1}$, ovvero gli interessi sono calcolati sul debito residuo relativo al periodo precedente;
- $E_K = C_1 + C_2 + ... + C_k$;
- D_K è il valore attuale delle restanti $n - k$ rate da pagare.

Esempio 1.5.1

Si completi il seguente piano di ammortamento (n.b. tasso variabile), giustificando opportunamente i calcoli effettuati.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–		–
1		8620			20000	
2	5%		8000			15000
3		6480				
4	10%			600		

Dalla riga corrispondente a $k = 2$, si ha $C_2 = 8000, 1E_2 = 15000$. Essendo il debito estinto uguale alla somma delle quote capitali versate, si ha $E_2 = C_1 + C_2$ da cui $C_1 = 15000 - 8000 = 7000$; inoltre $E_1 = C_1 = 7000$.

Si ottiene la tabella

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–		–
1		8620	7000		20000	7000
2	5%		8000			15000
3		6480				
4	10%			600		

La somma $E_k + D_k$ è costante e uguaglia il debito iniziale. Di conseguenza $D_0 = D_1 + E_1 = 20000 + 7000 = 27000$; inoltre $D_2 + E_2 = 27000$ implica $D_2 = 27000 - 15000 = 12000$. Si ha

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	27000	–
1		8620	7000		20000	7000
2	5%		8000		12000	15000
3		6480				
4	10%			600		

Dalla riga corrispondente a $k = 4$, si ha $i = 10\%$, $C_4 = 600$. Poichè gli interessi sono calcolati sul debito residuo relativo al periodo precedente, si ha $I_4 = i \cdot D_3$, ovvero $600 = 0.1 \cdot D_3$, da cui $D_3 = 6000$. Ne consegue $E_3 = 27000 - 6000 = 21000$ e $C_3 = 21000 - 15000 = 6000$. Si ha

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	27000	–
1		8620	7000		20000	7000
2	5%		8000		12000	15000
3		6480	6000		6000	21000
4	10%			600		

Ovviamente risulta $D_4 = 0,\ E_4 = 27000,\ C_4 = 6000$ da cui

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	27000	–
1		8620	7000		20000	7000
2	5%		8000		12000	15000
3		6480	6000		6000	21000
4	10%		6000	600	–	21000

Dalla riga corrispondente a $k = 1$, si ha $I_1 = 8620 - 7000 = 1620$; d'altra parte $I_1 = i \cdot D - 0$ da cui $i = \dfrac{1620}{27000} = 6\%$.
Dalla riga corrispondente a $k = 2$, si ha $I_2 = 0.05 \cdot D_1 = 0.05 \cdot 20000 = 1000$, da cui $R_2 = C_2 + I_2 = 8000 + 1000 = 9000$.

Dalla riga corrispondente a $k = 3$, si ha $I_2 = 6480 - 6000 = 480$; d'altra parte $I_2 = i \cdot D_1$ da cui $i = \dfrac{480}{12000} = 4\%$.
Infine, dalla riga corrispondente a $k = 2$, si ha $R_2 6000 + 600 = 6600$.

Si ottiene definitivamente

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	27000	–
1	6%	8620	7000	1620	20000	7000
2	5%	9000	8000	1000	12000	15000
3	4%	6480	6000	480	6000	21000
4	10%	6600	6000	600	–	21000

1.5.2 Ammortamento francese (a rata costante)

Il metodo di rimborso più usato nella pratica è l'ammortamento a rate costanti detto anche *metodo progressivo* oppure *metodo francese*.

La legge che lo regola prevede che il debitore rimborsi alla fine di ogni periodo e per tutta la durata dell'ammortamento **una rata costante** tale che al termine del tempo stabilito il debito sia completamente estinto.

La rata si calcola facilmente osservando che **il valore attuale di tutte le rate deve essere uguale al debito contratto**. Con riferimento a rate annuali e al tasso annuale si ha quindi:

$R = A \ \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$

Il debito residuo D_k è uguale al valore attuale delle restanti $n-k$ rate da pagare e quindi:

$D_k = R \ \dfrac{1-(1+i)^{-n+k}}{i}.$

L'interesse I_k è l'interesse di un anno calcolato sul debito residuo per cui:

$I_k = i \cdot D_{k-1} = R \ \left[1-(1+i)^{-n+k-1}\right].$

Ricordiamo poi che:

$E_k + D_k = A; \ E_k = A - D_k.$

$C_k = R - I_k = R \ (1+i)^{-n+k-1}.$

Osservazione 1.5.1 Si osservi che dalle relazioni

$C_k = R \ (1+i)^{-n+k-1}; \quad C_{k+1} = R \ (1+i)^{-n+k},$

si ha $C_k = R \ (1+i)^{-n+k}(1+i)^{-1} = C_{k+1}(1+i)^{-1}$, da cui

$C_{k+1} = C_k(1+i)$, **ovvero le quote capitali costituiscono una progressione geometrica di ragione $1+i$ (da qui il nome di metodo progressivo) e ciò permette di calcolare tutte le quote a partire dalla conoscenza di una di esse**.

Ad esempio, conoscendo C_1, si calcola $C_2 = C_1(1+i)$, $C_3 = C_2(1+i)$, e così via.

Esempio 1.5.2 Redigere il piano di ammortamento relativo a un prestito di 10000 euro estinguibile in 4 anni col metodo progressivo al tasso annuo dell' 8%.

• Si determina dapprima la rata costante

$R = A \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 10000 \dfrac{0.08}{1-(1.08)^{-4}} = 3019.208.$

Primo anno $I_1 = A \cdot i = 10000 \cdot 0.08 = 800$; $C_1 = R - I_1 = 2219.208$;

$E_1 = C_1 = 2219.208$; $D_1 = A - E_1 = 7780.792$.

La conoscenza di $C_1 = 2219.208$ permette di determinare tutte le quote capitali (vedi Osservazione 1.5.1):

$C_2 = 2219.208 \cdot 1.08 = 2396.745$, $C_3 = 2396.745 \cdot 1.08 = 2588.484$,

$C_4 = 2588.484 \cdot 1.08 = 2795.563$.

Si lascia allo studente completare il piano verificando che esso è

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	10000	–
1	8%	3019.208	2219.208	800	7780.792	2219.208
2	8%	3019.208	2396.745	622.463	5384.047	4615.953
3	8%	3019.208	2588.484	430.724	2795.563	7204.437
4	8%	3019.208	2795.563	223.645	0	10000

Esempio 1.5.3 Un prestito di 2000 Euro al tasso di interesse del 6% annuo è estinguibile mediante 20 annualità col metodo progressivo.

Determinare, il debito residuo, il debito estinto, la quota capitale e la quota interesse all'atto del versamento della ottava rata.

Calcoliamo dapprima la rata.

Si ha $R = \dfrac{2000 \cdot 0.06}{1-(1.06)^{-20}} = 174,37.$

Il debito residuo, all'atto del versamento della ottava rata, è uguale al valore attuale delle restanti rate pari a 20-8=12. Si ha quindi come debito residuo:

$D_8 = \dfrac{R}{i}[1-(1+i)^{-12}] = \dfrac{174.37}{0.06}[1-(1.06)^{-12}] = 1461.89.$

Il debito estinto è $2000 - 1461.89 = 538.11$.
Essendo $C_8 = R(1.06)^{-13} = 81.75$, si ha $I_8 = 174.37 - 81.75 = 92.62$.

1.5.3 Ammortamento progressivo indicizzato

Vediamo come si deve adattare un piano di ammortamento quando si abbia un tasso di interesse indicizzato, oppure quando per ragioni economiche (come è accaduto recentemente in Italia) la Banca alza o abbassa il tasso di interesse inizialmente concordato all'atto dell'accensione di un mutuo.
Riferendosi ad un tasso i^* da aggiungere o sottrarre al tasso inizialmente concordato i, si procede come segue:

- si calcola inizialmente la rata del mutuo rispetto al tasso i;
- dopo il pagamento della prima rata si controlla l'eventuale variazione del tasso; se questi resta inalterato si procede normalmente;
- se il tasso diviene $i+i^*$ si calcola il debito residuo in base al tasso originario i e, successivamente, la nuova rata assumendo come nuovo debito, il debito residuo e come tasso $i+i^*$;
- si ripete il procedimento.

Esempio 1.5.4 Un mutuo di 30000 euro è ammortizzato in 10 anni mediante pagamento di rate semestrali posticipate di uguale importo, al tasso semestrale del 7.5%. Dopo due anni si ha una variazione di tasso positiva dell' 0.8%. Calcolare la nuova rata da pagare per i restanti 8 anni.
• La rata iniziale è data da
$R = A\,\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 30000\,\dfrac{0.075}{1-(1.075)^{-20}} = 2942.766.$
Dopo due anni, ovvero dopo il pagamento della quarta rata, si ha un debito residuo uguale a $D_4 = R\,\dfrac{1-(1+i)^{-n+4}}{i} = 2942.766\,\dfrac{1-(1.075)^{-20+4}}{0.075} = 26901.315.$

Il nuovo tasso diviene $i_1 = i + i^* = 0.075 + 0.008 = 0.083 = 8.3\%$.

La nuova rata si calcola assumendo $n = 16$, $i_1 = 0.083$ e $A_{new} = D_4 = 26901.315$.

Risulta $R_{new} = A_{new} \dfrac{i_1}{1-(1+i_1)^{-16}} = 26901.315 \dfrac{0.083}{1-(1.083)^{-16}} = 3097.763$.

Esempio 1.5.5 Un prestito di 25.000 euro viene ammortizzato tramite il pagamento di 5 rate annue costanti al tasso di interesse del 10%.

a) Calcolare la rata annua;

b) dopo il pagamento della seconda rata il tasso di interesse diviene del 15%.

Calcolare la nuova rata costante;

c) all'atto del pagamento della quarta rata si dichiara di volere estinguere tutto il debito.

Quanto si deve pagare?.

d) redigere il piano di ammortamento.

•

a) $R = A \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 25000 \dfrac{0.1}{1-(1.1)^{-5}} = 6594.94$.

b) Per comprendere bene la logica dello svolgimento, iniziamo a predisporre il piano di ammortamento relativo alle prime due rate che sono rimaste uguali.

Inizialmente si ha:

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	25000	0
1	10%	6594.94				
2	10%	6594.94				
3						
4						
5						

Gli interessi da pagare al termine del primo anno sono $I_1 = 25000 \cdot 0.1 = 2500$;

Essendo $C_1 = R - I_1$, sottraendo dalla rata gli interessi, si ha

$C_1 = 6594.94 - 2500 = 4094.94$, cifra che coincide con il debito estinto D_1.

Il debito residuo diviene $D_1 = 25000 - 4094.94 = 20905.06$.

Si perviene alla seconda tabella

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	25000	0
1	10%	6594.94	4094.94	2500	20905.06	6594.94
2	10%	6594.94				
3						
4						
5						

Gli interessi da pagare al termine del secondo periodo sono

$I_2 = 20905.06 \cdot 0.1 = 2090.51$;

Essendo $C_2 = R - I_2$, sottraendo dalla rata gli interessi si ha

$C_2 = 6594.94 - 2090.51 = 4504.44$.

Il debito residuo diviene $D_1 = 20905.06 - 4504.44 = 16400.63$.

Il debito estinti si può calcolare come differenza tra il debito iniziale e il debito estinto, cioè 25000- 16400.63= 8599.38, oppure come somma delle due quote capitali versate 4094.94+4504.44=8599.38.

Si perviene alla terza tabella,

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	25000	0
1	10%	6594.94	4094.94	2500	20905.06	6594.94
2	10%	6594.94	4504.44	2090.51	16400.63	8599.38
3						
4						
5						

Dal periodo due in poi il tasso è del 15%. Si ha quindi un cambio di situazione con i seguenti dati: debito da pagare ovvero debito residuo, uguale a 16400.63; numero rate da pagare uguali a 5-2=3; tasso 15%.

E' come essere ritornati al tempo zero e quindi si ripete il ragionamento a partire dal calcolo della nuova rata $R_{new} = 16400.63 \, \dfrac{0.15}{1-(1.15)^{-3}} = 7183.10$.

Gli interessi da pagare al termine del terzo periodo sono

$I_3 = 16400.63 \cdot 0.15 = 2460.09$;

Essendo $C_3 = R - I_3$, sottraendo dalla rata gli interessi si ha

$C_3 = 7183.10 - 2460.09 = 4723.01$.

Il debito residuo diviene $D_3 = 16400.63 - 4723.01 = 11677.62$.

Calcoliamo il debito estinto come differenza tra il debito iniziale e il debito estinto, cioè 25000- 11677.62= 13322.38.

Si perviene alla quarta tabella,

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	25000	0
1	10%	6594.94	4094.94	2500	20905.06	6594.94
2	10%	6594.94	4504.44	2090.51	16400.63	8599.38
3	15%	7183.10	4723.01	2460.09	11677.62	13322.3
4	15%					
5						

Per estinguere totalmente il debito, dobbiamo pagare il debito residuo e gli interessi maturati tra il periodo tre e il periodo 4, interessi pari a $11677.62 \cdot 0.15 = 1751.64$. Si deve quindi estinguere il debito con 11677.62+1751.64=13429.26, cifra che costituisce l'ultima rata

Si ha infine

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	25000	0
1	10%	6594.94	4094.94	2500	20905.06	6594.94
2	10%	6594.94	4504.44	2090.51	16400.63	8599.38
3	15%	7183.10	4723.01	2460.09	11677.62	13322.3
4	15%	13429.26	11677.62	1751.64	0	25000

Esempio 1.5.6 Un prestito di 30.000 euro viene ammortizzato tramite il pagamento di 5 rate annue costanti al tasso di interesse del 5%.

a) Calcolare la rata annua;

b) non viene pagata la seconda rata.

Calcolare la nuova rata;

c) dopo il pagamento della terza rata l'interesse annuo diviene dell'8%.

Calcolare la nuova rata;

d) redigere il piano di ammortamento.

•

a) $R = A\,\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 30000\,\dfrac{0.05}{1-(1.05)^{-5}} = 6929.24.$

b) Rispetto al primo periodo si ha

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	30000	0
1	5%	6929.24	5429.24	1500	24570.76	6929.24
2						
3						
4						
5						

Al termine del secondo periodo, la rata è nulla. Si devono tuttavia pagare gli interessi passivi dovuti dal primo al secondo periodo, pari a $24570.76 \cdot 0.05 = 1228.54$ che vanno a sommarsi al debito che diviene 24570.76+1228.54= 25799.30. Conseguentemente il debito estinto diviene 30000-25799.30=4200.70.

Essendo poi uguale a zero la somma tra gli interessi e la quota capitale si ha $C = -1228.54$; il segno meno va solo interpretato: essendo il debito estinto diminuito è come se da esso si fossero tolti gli interessi. Si perviene alla seconda tabella,

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	30000	0
1	5%	6929.24	5429.24	1500	24570.76	6929.24
2	5%	0	−1228.54	1228.54	25799.30	4200.70
3	5%					
4						
5						

Al termine del secondo periodo abbiamo la seguente situazione:

debito residuo uguale a 25799.30; tre rate da pagare; interesse 5%.

La nuova rata diviene $R = 25799.30 \dfrac{0.05}{1-(1.05)^{-3}} = 9473.72$.

Si ha $I_3 = 25799.30 \cdot 0.05 = 1289.96$, $C_3 = 9473.72 - 1289.96 = 8183.76$, $D_3 = 25799.30 - 8183.76 = 17615.54$, $E_3 = 30000 - 17615.54 = 12384.46$. Si perviene alla terza tabella.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	30000	0
1	5%	6929.24	5429.24	1500	24570.76	6929.24
2	5%	0	−1228.54	1228.54	25799.30	4200.70
3	5%	9473.72	8183.76	1289.96	17615.54	12384.46
4	8%					
5	8%					

La variazione del tasso implica ancora una volta, il cambio di rata.

Dal periodo tre in poi il tasso è del 8%. Si ha quindi un cambio di situazione con i seguenti dati: debito residuo uguale a 17615.54; numero rate da pagare uguali a 2; tasso 8%.

Si ha:

$R = 17615.54 \dfrac{0.08}{1-(1.08)^{-2}} = 9878.25$.

Possiamo ora completare il piano di ammortamento nel consueto modo. Si ha

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	30000	0
1	5%	6929.24	5429.24	1500	24570.76	6929.24
2	5%	0	−1228.54	1228.54	25799.30	4200.70
3	5%	9473.72	8183.76	1289.96	17615.54	12384.46
4	8%	9878.25	1409.24	8649.01	9146.53	20853.47
5	8%	9878.25	9146.53	731.72	0	30000

1.5.4 Ammortamento a quote costanti di capitale

Con questo metodo, detto anche **metodo italiano**, si stabilisce che il debitore rimborsi alla fine di ogni periodo una quota uguale del prestito ricevuto oltre agli interessi dovuti calcolati sul debito residuo.
Indicato con A il prestito ricevuto, si ricavano immediatamente le seguenti relazioni:

$$C = \frac{A}{n};\; E_k = k\,\frac{A}{n};\; D_k = \frac{A}{n}(n-k);\; I_k = \frac{A}{n}\,i\,(n-k+1);\; R_k = \frac{A}{n}\big[1+i(n-k+1)\big] \tag{1.5.1}$$

Esempio 1.5.7 Un debito di 2000 euro al tasso del 5% viene estinto in 4 anni col metodo italiano. Costruire il piano di ammortamento.
• La quota costante di capitale $C = \dfrac{A}{n} = \dfrac{2000}{4} = 500$;
$I_1 = 2000 \cdot 0.05 = 100$, per cui $R_1 = 500 + 100 = 600$:
$E_1 = 500$; $D_1 = 2000 - 500 = 1500$.

Procedendo nel solito modo si perviene al seguente piano di ammortamento:

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	2000	–
1	5%	600	500	100	1500	500
2	5%	575	500	75	1000	1000
3	5%	550	500	50	500	1500
4	5%	525	500	25	0	2000

Osservazione 1.5.2 E' facile verificare che le quote interessi costituiscono una progressione aritmetica di ragione $-\dfrac{A}{n}\,i$, mentre le rate decrescono in progressione geometrica di ragione $\dfrac{A}{n}\,i$.

1.5.5 Esercizi sugli ammortamenti

Esercizio

Un mutuo di 20000 euro viene ammortizzato tramite il pagamento di 3 rate annue al tasso annuo $i = 4\%$.

a) Redigere il piano di ammortamento francese;

b) redigere il piano di ammortamento italiano.

•

a) $R = 7206.97$.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	20000	–
1	4%	7206.97	6406.97	800	13593.03	6406.97
2	4%	7206.97	6663.25	543.72	6929.78	13070.22
3	4%	7206.97	6929.78	277.19	–	20000

b)

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	20000	–
1	4%	7466.67	6666.67	800	13333.33	6666.67
2	4%	7200	6666.67	533.33	6666.66	13333.34
3	4%	6933.33	6666.66	266.67	–	20000

Esercizio 1.5.1

Un prestito di euro 10000 viene ammortizzato con 4 rate annue al tasso $i = 2\%$. Redigere il piano di ammortamento italiano.

•

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	10000	–
1	2%	2700	2500	200	7500	2500
2	2%	2650	2500	150	5000	5000
3	2%	2600	2500	100	2500	7500
4	2%	2550	2500	50	–	10000

Esercizio 1.5.2

Un prestito di 50000 euro viene ammortizzato in tre anni con rate semestrali costanti al tasso annuo del 8.16%.

Redigere il piano di ammortamento francese relativo ai primi due anni.

• Tasso semestrale $i_2 = 4\%$. Rata semestrale $R = 953.81$.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	5000	–
1	4%	953.81	753.81	200	4246.19	753.81
2	4%	953.81	783.96	169.85	3462.23	1537.77

Esercizio 1.5.3

Un debito di 80.000 euro viene ammortizzato con 36 rate mensili costanti posticipate al tasso annuo nominale convertibile mensilmente $j_{12} = 6$ %.

a) Redigere il piano di ammortamento (metodo francese) per i primi tre mesi.

b) Calcolare D_{20} e C_{21}.

Si ha $i_{12} = \dfrac{j_{12}}{12} = 0.5\% = 0.005$; $R = \dfrac{80000 \cdot 0.005}{1-(1.005)^{-36}} = 2433.76$.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	80000	–
1	0.5%	2433.76	2033.76	400	77966.24	2033.76
2	0.5%	2433.76	2043.93	389.83	75922.31	4077.69
3	0.5%	2433.76	2054.15	379.61	73868.16	6131.84

b) $D_{20} = 26376.53$; $C_{21} = 2247.09$

Esercizio 1.5.4 Un prestito di 25.000 euro viene ammortizzato tramite il pagamento di 4 rate annue costanti.

Calcolare la rata annua al tasso $i = 3\%$. Tenendo conto che dopo il pagamento della seconda rata, il tasso passa al $i = 4\%$, calcolare la nuova rata costante.

•

$R = 6725.676$; $R_{new} = 6823.29$

Esercizio 1.5.5 Un prestito di 5000 euro viene rimborsato attraverso il versamento di 4 rate costanti annuali con un tasso di interesse del 15% annuo. All'atto del versamento della seconda rata, il mutuo viene rinegoziato ad un tasso di interesse del 12% annuo.

Calcolare la rata iniziale e quella finale.

•

Rata dei primi due anni R = 1751.33; rate successive 1684.65.

Esercizio 1.5.6

Si prevede di estinguere un debito di 10.000 euro in 9 rate annue costanti immediate posticipate al tasso effettivo annuo del 11%. Calcolare l'importo delle rate.
Dopo tre anni, vinco alla lotteria 2.000 euro.
Al momento del pagamento della terza rata, oltre alla rata verso la vincita e chiedo alla banca di poter sospendere il pagamento della quarta e quinta rata.
La banca accetta la dilazione nei pagamenti, ma comunica che il tasso d'interesse annuo è diventato del 13%.
Quale sarà la nuova rata annua da pagare per estinguere il debito alla scadenza inizialmente prevista?

•

$R = 1806.02$; debito dopo 5 anni $D = 6564.90$; $R_{new} = 2207.08$

Esercizio 1.5.7

Un prestito di 5000 euro viene rimborsato attraverso il versamento di 4 rate costanti annuali con un tasso di interesse del 15% annuo. All'atto del versamento della seconda rata, il mutuo viene rinegoziato ad un tasso di interesse del 12% annuo.
Calcolare la rata iniziale e quella finale.

•

Rata dei primi due anni R = 1751.33; rate successive 1684.65.

Esercizio 1.5.8

Si prevede di estinguere un debito di 10.000 euro in 9 rate annue costanti immediate posticipate al tasso effettivo annuo del 11%. Calcolare l'importo delle rate.
Dopo tre anni, vinco alla lotteria 2.000 euro.
Al momento del pagamento della terza rata, oltre alla rata verso la vincita e chiedo alla banca di poter sospendere il pagamento della quarta e quinta rata.

La banca accetta la dilazione nei pagamenti, ma comunica che il tasso d'interesse annuo è diventato del 13%.
Quale sarà la nuova rata annua da pagare per estinguere il debito alla scadenza inizialmente prevista?

•

$R = 1806.02$; debito dopo 5 anni $D = 6564.90$; $R_{new} = 2207.08$

Esercizio 1.5.9

Si contrae un debito di 40.000 euro con una banca, da estinguersi con un ammortamento alla francese di 5 anni al tasso effettivo annuo del 6%. Al momento del pagamento della terza rata la banca comunica una variazione del tasso effettivo annuo che passa al 9%.
Calcolare la nuova rata.

•

$R = 9495.86$; debito residuo 17391.31; $R_{new} = 9886.42$.

Esercizio 1.5.10

Un debito di 55000 euro viene ammortizzato in 240 rate mensili, posticipate, costanti, al tasso $j_{12} = 0.2\%$.
a) Calcolare la rata mensile.
b) Contestualmente al pagamento della centesima rata, viene effettuato un ulteriore versamento di 10000 euro a titolo di rimborso del capitale. Determinare l'ammontare della quinta rata tenendo conto del rimborso parziale del capitale.

•

$R = 288.77$. Debito residuo dopo il pagamento della centesima rata $D_{100} = 35230.65$ che diviene $D^*_{100} = 25230.65$. Nuova rata $R_{new} = 206.80$.

Esercizio 1.5.11

Un prestito di 20000 euro viene ammortizzato tramite il pagamento di 4 rate annue.

Tenendo conto che dopo il pagamento della seconda rata il tasso passa dal $i = 5\%$ iniziale al $i = 6\%$, redigere il piano di ammortamento con il metodo italiano.

• Soluzione

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	20000	–
1	5%	6000	5000	1000	15000	5000
2	5%	5750	5000	750	10000	10000
3	6%	5600	5000	600	5000	15000
4	6%	5300	5000	300	–	20000

Esercizio 1.5.12

Un mutuo di 150000 euro viene ammortizzato tramite il pagamento di 30 rate annue al tasso annuo $i = 4\%$.

a) Redigere il piano di ammortamento francese relativo ai primi due anni;

b) dopo il pagamento della seconda rata il tasso passa dal $i = 4\%$ iniziale al $i = 5\%$, ferme restando le altre condizioni. Calcolare la nuova rata annuale.

•

a) $R = 8674.51$

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	150000	–
1	4%	8674.51	2674.51	6000	147325.49	2674.51
2	4%	8674.51	2781.49	5893.02	144544	5456

b) $D_2 = 144543.91$; $R_{new} = 9702.15$

Esercizio 1.5.13

Si rediga un piano di ammortamento in 4 anni di un debito di 20000 euro, con metodo italiano, con tasso di interesse del 4% per il primo anno e del 5% per gli ultimi tre.

• Soluzione

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	20000	–
1	4%	5800	5000	800	15000	5000
2	5%	5750	5000	750	10000	10000
3	5%	5500	5000	500	5000	15000
4	5%	5250	5000	250	–	20000

Esercizio 1.5.14

Si completi il seguente piano di ammortamento (n.b. tasso variabile), giustificando opportunamente i calcoli effettuati.

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–		–
1		8620			20000	
2	5%		8000			15000
3		6480				
4	10%			600		

• Soluzione

k	i_k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	27000	–
1	6%	8620	7000	1620	20000	7000
2	5%	9000	8000	1000	12000	15000
3	4%	6480	6000	480	6000	21000
4	10%	6600	6000	600	–	27000

Esercizio 1.5.15

Dopo aver indicato le relazioni fondamentali che legano le grandezze di un piano di ammortamento, completare la seguente tabella:

k	i_k	R_k	I_k	C_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–		–
1			300		21300	
2	3%	739				
3			1060	9000		
4	2%	8244		8000		25800
5		4368				

•. Soluzione

k	i_k	R_k	I_k	C_k	D_k	E_k
0	–	–	–	–	30000	–
1	1%	9000	300	8700	21300	8700
2	3%	739	639	100	21200	8800
3	5%	10060	1060	9000	12200	17800
4	2%	8244	244	8000	4200	25800
5	5%	4368	168	4200	–	30000

1.6 Costituzione di capitali

Si parla di costituzione di un capitale quando un soggetto attua un piano di risparmio attraverso l'accantonamento di somme (dette **rate di costituzione del capitale**) al fine di poter disporre nel futuro una somma che gli permetta di realizzare un certo obiettivo (acquisto di una casa, integrazione alla pensione, un lascito a un figlio o a un nipote, ecc.).

Si tratta in sostanza di fare in modo che il montante relativo alle rate versate nelle varie scadenze coincida con il capitale M che si vuole raggiungere.

Nel seguito, considereremo le seguenti convenzioni:

• **Il numero delle rate coincide col numero degli anni** necessari a raggiungere il capitale M desiderato.

• **Le rate sono costanti** e possono essere **posticipate** o **anticipate**.

Nelle rate posticipate le rate si versano alla fine di ogni periodo;

nelle rate anticipate le rate si versano all'inizio di ogni periodo a partire quindi dal tempo $t = 0$. Il montante accumulato dopo il versamento dell'ultima rata deve essere capitalizzato di un periodo, ovvero moltiplicato per $1 + i$.

1.6.1 Costituzione di un capitale con rate posticipate

Il montante all'epoca del versamento della $k - ma$ rata (equivalentemente, al tempo $t = k$), è detto **fondo di costituzione al tempo k** e denotato con F_k.

Ricordando la formula del montante stabilito nelle rendite, le formule di riferimento divengono

$$F_k = \frac{R}{i}\big[(1+i)^k - 1\big],\ k = 1, 1, ..., n. \tag{1.6.1}$$

In particolare

$$M = \frac{R}{i}\big[(1+i)^n - 1\big]; \qquad R = \frac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big]} \tag{1.6.2}$$

Esempio 1.6.1 Si vuole costituire un capitale di 16000 euro in 10 anni con rate costanti annuali posticipate al tasso annuo del 3.5%.

a) Calcolare l'importo della rata;

b) calcolare il fondo costituito dopo 5 anni.

•

a) Si ha $M = 16000,\ n = 10,\ i = 3.5\%$. Applicando la (1.6.2) si ha
$R = \dfrac{M \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \dfrac{16000 \cdot 0.035}{(1.035)^{10} - 1} = 1363.86.$
b) Si deve calcolare il montante accumulato in 5 anni con versamento di rata posticipata. Applicando la (1.6.1) si ha
$F_5 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^5 - 1\big] = \dfrac{1363.86}{0.035}\big[(1.035)^5 - 1\big] = 7313.65.$

Esempio 1.6.2

Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 5 anni con rate trimestrali costanti posticipate al tasso annuo nominale convertibile 4 volte l'anno del 8%.

a) Calcolare l'importo della rata.

b) calcolare il fondo costituito all'atto del versamento della settima rata.

•

a) Si ha $i_4 = \dfrac{j_4}{4} = 2\%$. Tenuto conto che 5 anni corrispondono a 20 trimestri, i dati del problema divengono: M=10000, n= 20, i=2%.

Applicando la (1.6.2) si ha
$R = \dfrac{10000 \cdot 0.02}{\big[(1.02)^{20} - 1\big]} = 411.57.$
b) Si ha $F_7 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^7 - 1\big] = \dfrac{411.57}{0.02}\big[(1.02)^7 - 1\big] = 3059.73.$

Esempio 1.6.3

Si vuole costituire un capitale di 12000 euro in 8 anni al tasso annuo del 6.09% con rate semestrali costanti posticipate.

a) Calcolare l'importo della rata.

b) calcolare il fondo costituito all'atto del versamento della decima rata.

•

a) Essendo le rate semestrali, occorre preliminarmente calcolare il tasso semestrale. Si ha $(1+i_2)^2 = 1+i = 1.0609$ da cui $1+i_2 = 1.03$, $i_2 = 3\%$.

Tenuto conto che 8 anni corrispondono a 16 semestri, i dati del problema divengono: M=12000, n=16, i=3%.

Applicando la (1.6.2) si ha

$R = \dfrac{12000 \cdot 0.03}{\left[(1.03)^{16} - 1\right]} = 595.33.$

b) Si ha $F_{10} = \dfrac{595.33}{0.03}\left[(1.03)^{10} - 1\right] = 6824.79.$

Esempio 1.6.4

Si vuole costituire un capitale in 15 anni con rate annuali posticipate al tasso $i = 4\%$.

All'atto del versamento della ottava rata si sono accumulati 11501 euro.

Calcolare il capitale che si vuole costituire.

•

Sappiamo che $F_8 = \dfrac{R}{i}\left[(1+i)^8 - 1\right] = 11504.24$, da cui

$R = \dfrac{11504.24 \cdot 0.04}{1.04^8 - 1} = 1248.53.$

Conoscendo la rata possiamo ora calcolare il capitale desiderato.

Si ha $M = \dfrac{R}{i}\left[(1+i)^{15} - 1\right] = \dfrac{1248.53}{0.04}\left[(1.04)^{15} - 1\right] = 25000.$

.

Esempio 1.6.5 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 20000 euro mediante versamenti annuali posticipati d'importo pari a 1590.09 euro, al tasso effettivo annuo $i = 5\%$.

•

Iniziamo a scrivere la formula del montante:

$M = \dfrac{1590.09}{0.05}\big(1.05^n - 1\big) = 20000$. Svolgendo i calcoli abbiamo
$31801.80(1.05^n - 1) = 20000$, da cui $1.05^n - 1 = \dfrac{20000}{31801.80} = 0.629$,
$1.05^n = 1.629$.
Infine $n = \dfrac{\log 1.629}{\log 1.05} = 10$.

Esempio 1.6.6 Si vuole costituire un capitale di 20000 euro in 12 anni con rate costanti annuali posticipate al tasso annuo del 4%.
Calcolare l'importo della rata sapendo che ogni anno è applicata sugli interessi una ritenuta fiscale del 20%.

•

La ritenuta fiscale del 20% implica che l'interesse viene calcolato sull'80% di quello stabilito, ovvero $4 \cdot \frac{80}{100} = 3.2\%$. Si ha $M = 16000,\ n = 12,\ i = 3.2\%$. Applicando la (1.6.5) si ha
$R = \dfrac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big]} = \dfrac{12000 \cdot 0.032}{\big[(1.032)^{12} - 1\big]} = 835.98.$

Osservazione 1.6.1 Avvertenza
Mentre negli ammortamenti ci si riferisce essenzialmente al valore attuale, nella costituzione di capitale ci si deve riferire principalmente al montante finale, nel senso che di ogni versamento o fondo costituito si deve trovate il valore del suo montante finale.

Esempio 1.6.7
a) Vogliamo accantonare un capitale finale di 25.000 euro mediante il versamento di 10 rate annuali costanti posticipate al tasso effettivo annuo del 10%.
Calcolare la rata da versare annualmente.
b) Dopo aver versato le prime 2 rate, non versiamo le 2 rate successive (la terza e la quarta) e riprendiamo il versamento dalla quinta rata con lo stesso importo iniziale.

Quanto potremo ottenere alla fine del decimo anno?

•

Per la rata iniziale si ha
$R = \dfrac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \dfrac{25000}{\big[(1.1)^{10} - 1\big]} = 1568.63.$
La sequenza dei versamenti e dei corrispettivi tempi è data da

$(R, 1),\ (R, 2),\ (0, 3),\ (0, 4),\ (R, 5),\ (R, 6),\ (R, 7),\ (R, 8),\ (R, 9),\ (R, 10).$

Il montante dopo i primi due versamenti è
$F_2 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^2 - 1\big] = \dfrac{1568.63}{0.1}\big[(1.1)^2 - 1\big] = 3294.12.$ Il capitale F_2 produce alla scadenza (ovvero dopo altri 8 periodi) un montante pari a $M_1 = F_2(1.1)^8 = 7061.24.$

Si devono versare ancora 6 rate posticipate che producono alla scadenza un montante M_2 pari a
$M_2 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^6 - 1\big] = \dfrac{1568.63}{0.1}\big[(1.1)^6 - 1\big] = 12102.94.$
Alla fine del decimo anno si dispone di un capitale pari a

$7061.24 + 12102.94 = 19164.18.$

Esempio 1.6.8

Si vuol costituire in 10 anni un capitale di 100.000 euro con un piano composto da 10 rate costanti immediate posticipate. Calcolare l'entità delle rate assumendo per l'intero piano un tasso costante $i = 5\%$.
Dopo le prime 4 rate si decide di non pagare le due rate successive e di versare una settima rata di 20.000 euro; si porta quindi a compimento la costituzione del capitale con le ultime tre rate costanti. Calcolare l'entità delle ultime tre rate assumendo, a partire dal pagamento della settima rata, un tasso costante $i = 6\%$.

Per la rata iniziale si ha
$R = \dfrac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \dfrac{1000000 \cdot 0.05}{\big[(1.05)^{10} - 1\big](1.05)} = 7950.45.$

La sequenza dei pagamenti è data da

$0,\ R,\ R,\ R,\ R,\ 0,\ 0\ 20000\ R^*,\ R^*,\ R^*.$

Calcoliamo dapprima il montante generato dalle prime quattro rate, ovvero F_4.
$F_4 = \dfrac{R}{i}\left[(1+i)^4 - 1\right] = \dfrac{7950.45}{0.05}\left[(1.05)^4 - 1\right] = 34266.44.$
Il montante F_4 produce all'epoca corrispondente a $F_{10} = M$ un montante M_1 ottenuto capitalizzando F_4 di sei annualità , di cui tre al tasso del 5% e quattro al tasso del 6%; si ha $M_1 = 34266.44 \cdot 1.05^3 \cdot 1.06^4 = 50079.54$.

Il capitale di 20000 euro produce all'epoca finale un montante pari a

$M_2 = 20000 \cdot 1.06^3 = 23820.32.$

Il montante prodotto dalle tre rate anticipate R^* è dato da
$M_3 = \dfrac{R^*}{0.06}\left[(1.06)^3 - 1\right] = R^* \cdot .$
Il capitale che si vuole accumulare è la somma di tutti i singoli montanti.

Ne segue che $100000 = 50079.54 + 23820.32 + 3.18R^*$, da cui $R^* = 8207.59$.

Esempio 1.6.9

Si vuole costituire un capitale di 5000 euro in 7 anni con rate posticipate al tasso $i = 6\%$.

Sapendo che le prime 3 rate sono il doppio delle restanti, calcolare l'importo delle due rate.

•

Denotiamo con R l'importo della rata a partire dal quarto versamento; $2R$ diviene l'importo delle prime tre rate.

Le prime 3 rate producono un fondo pari a
$F_3 = \dfrac{2R}{0.06}\left[(1.06)^3 - 1\right] = 6.37R$. Tale ammontare produce un montante finale uguale a $M_3 = F_3 \cdot (1.06)^4 = 8.04R$.

Le restanti 4 rate producono un montante finale dato da
$M_2 = \dfrac{R}{0.06}\left[(1.06)^4 - 1\right] = 4.38R.$

Il montante finale diviene $M = 5000 = M_1 + M_2 = (8.04 + 4.38)R = 12.42R$, da cui $R = 402.58$.
L'importo delle prime tre rate è uguale a 805.16 euro mentre quello delle rate successive è di 402.58 euro.

1.6.2 Il piano di costituzione

Per la costituzione di un capitale si redige un prospetto detto **piano di costituzione** che evidenzia il capitale che via via si accumula nel tempo:
Il piano di costituzione con rata posticipata è del tipo (nel caso di versamento di 4 rate)

k	i	I_k	R_k	F_k
1				
2				
3				
4				

ove R_k denota la k-ma rata versata e F_k denota il fondo costituito all'inizio del periodo k, equivalente al montante delle rate versate.
Si osservi che al tempo $t = k$ abbiamo la seguente situazione di cassa: il fondo acquisito l'anno precedente ovvero al tempo t_{k-1}, F_{k-1}; ad esso si viene ad aggiungere l'interesse I_k maturato nel periodo, pari a $F_{k-1} \cdot i$, e la rata ultima versata R_k.
Si ha quindi la relazione

$$F_k = F_{k-1} + i \cdot F_{k-1} + R_k, k = 2, ..., n \qquad (1.6.3)$$

con la convenzione $F_1 = R_1, \;\; R_n = 0$ che permette di redigere agevolmente il piano di costituzione

Esempio 1.6.10

Calcolare il capitale accumulato dopo 4 anni in seguito al versamento delle seguenti rate anticipate al tasso del 5%: 200, 230, 250, 252,40.

•

Si riportano i versamenti effettuati (rate) nella quarta colonna;
ovviamente per $k = 1$ si ha $R_1 = 200,\ F_1 = 200$ in quanto alla prima rata si ha uguaglianza tra fondo costituito e rata versata.
Per $k = 2$, applicando la (1.6.6) si calcola l'interesse $I_1 = 200 \cdot 5\% = 10$;
si effettua la somma dei numeri $200 + 10 + 230 = 440$.
Similmente, per $k = 2$, si calcola l'interesse $I_2 = 440 \cdot 5\% = 22$ e si effettua la somma dei numeri $440 + 22 + 250 = 712$ e così via.

k	i	I_k	R_k	F_k
1	-	-	200	200
2	5%	10	230	440
3	5%	22	250	712
4	5%	35.6	252.4	1000

Al quarto anno si è accumulato 1000 Euro.

Esempio 1.6.11

Si vuole costituire un capitale di 60000 euro in tre anni tramite tre versamenti posticipati costanti al tasso del 5%. Redigere il piano di costituzione.

•

La rata costante è $R = \dfrac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big]} = \dfrac{60000 \cdot 0.05}{\big[(1.05)^3 - 1\big]} = 19032.51.$

k	i	I_k	R_k	F_k
1	-	-	19032.51	19032.51
2	5%	951.62	19032.51	39016.64
3	5%	1950.83	19032.51	60000

Esempio 1.6.12

Si vuole costituire tra 4 anni un capitale di 1000 euro versando 4 rate posticipare costanti al tasso del 5%.

Redigere il piano di costituzione.

La rata costante è $R = \dfrac{S \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \dfrac{1000 \cdot 0.05}{\big[(1.05)^4 - 1\big](1.05)} = 232.01.$

k	i	I_k	R_k	F_k
1	-	-	232.01	232.01
2	5%	11.60	232.01	475.62
3	5%	23.78	232.01	731.41
4	5%	36.57	232.01	1000

1.6.3 Esercizi

Esercizio 1.6.1

Si vuole costituire un capitale di 6000 euro in 4 anni con rate costanti posticipate al tasso del 3,5%.

Calcolare l'importo della rata.

• $R = 1423.51$.

Esercizio 1.6.2

Si vuole costituire un capitale di 20000 euro versando 12 rate annuali posticipate al tasso annuo del 5%.

Calcolare l'ammontare della rata.

• $R = 1256.51$.

Esercizio 1.6.3

Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 15 anni con rate costanti posticipate al tasso $i = 3\%$.

a) Calcolare l'importo della rata;

b) calcolare il fondo costituito al sesto anno.

•

a) $R = 537.66$; b) $F_6 = 3477.80$.

Esercizio 1.6.4

Si vuole costituire un capitale di 12000 euro versando per 3 anni rate semestrali costanti posticipate al tasso annuo del 4.04%.

Calcolare la rata e il fondo di costituzione al secondo anno.

•

$i_2 = 2\%$; $R = 1902.31$; $F_4 = 7840.58$.

Esercizio 1.6.5

Si vuole costituire un capitale di 20000 euro, versando 5 rate semestrali posticipate al tasso di interesse annuo del 6.09%.

a) Calcolare la rata da versare.

b) calcolare il fondo costituito all'atto del versamento della quinta rata.

•

a) $i_2 = 2\%$, $R = 1826.53$; $F_5 = 9505.34$.

Esercizio 1.6.6

Si vuole costituire un capitale di 30000 euro in 5 anni con rate costanti posticipate al tasso annuo nominale convertibile 3 volte l'anno del 6%.

Calcolare l'importo della rata.

• $i_3 = 2\%$, $R = 1734.76$.

Esercizio 1.6.7

Si vuole costituire un capitale di 6000 euro in 3 anni con rate costanti posticipate trimestrali del 2,5%.

Calcolare l'importo della rata.

• $R = 434.92$.

Esercizio 1.6.8

Si vuole costituire un capitale in 10 anni con rate annuali posticipate al tasso $i = 2.5\%\%$.

All'atto del versamento della sesta rata si sono accumulati 11403.23 euro.

Calcolare il capitale che si vuole costituire.

•

$M = 20000$.

Esercizio 1.6.9

Si vuole costituire un capitale in 5 anni con rate annuali posticipate al tasso $i = 3.5\%$.

All'atto del versamento della terza rata si sono accumulati 4634.02 euro.

Calcolare il capitale che si vuole costituire.

•

$M = 8000$.

Esercizio 1.6.10 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 6000 euro mediante versamenti annuali posticipati, d'importo pari a 399.31 euro, al tasso effettivo annuo $i = 4\%$.

•

n= 12.

Esercizio 1.6.11 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 15000 euro mediante versamenti annuali posticipati, d'importo pari a 660.23 euro, al tasso effettivo annuo $i = 4.5\%$.

•

n= 16

Esercizio 1.6.12 Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 8 anni con rate semestrali posticipate al tasso $i_2 = 1.5\%$.

Calcolare l'importo della rata sapendo che ogni anno è applicata sugli interessi una ritenuta fiscale del 10%.

•

Tasso effettivo 1.35%. $R = 564.12$.

Esercizio 1.6.13 Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 20 anni con rate annuali posticipate al tasso $i = 4\%$.
Calcolare l'importo della rata sapendo che ogni anno è applicata sugli interessi una ritenuta fiscale del 15%.

•

Tasso effettivo 3.4%. $R = 357.26$.

Esercizio 1.6.14 Due genitori vogliono accantonare dei soldi da regalare al proprio figlio quando raggiungerà la maggiore età. A tal fine, viene loro proposta dalla banca una operazione finanziaria di costituzione di capitale a tasso fisso con rate costanti immediate posticipate.
a) Supponendo che si voglia accantonare un capitale finale di 25000 euro in 10 rate annuali al tasso effettivo annuo del 6%, calcolare la rata.
b) Subito dopo il pagamento della rata numero 5 i genitori decidono di aumentare a 35000 euro il capitale finale da accantonare. Calcolare l'ammontare delle 5 rate rimanenti tenendo conto che il tasso effettivo annuo rimane invariato.

•

$R = 1896.70; F_5 = 10691.87; M_1 = 14317.18$ capitale accumulato alla fine decimo anno.
Capitale da accumulare con le restanti 5 rate: 35000-14317.18=20682.82
$R_{new} = 3667.17$.

Esercizio 1.6.15

Si vuole costituire un capitale di 75000 euro versando 10 rate annuali posticipate al tasso annuo del 6.25%.
a) Calcolare l'ammontare della rata;
b) dopo il versamento della sesta rata il tasso di interesse aumenta dello 0.25%.
Calcolare la nuova rata.

•

R= 5623.63 $F_6 = 39474.39$, $M_1 = F_5(1.0625)^4 = 50307.32$; da costituire 75000-53451.57=24692.68 in 4 anni al tasso 6.5%.

$R_{new} = 5602.84$.

Esercizio 1.6.16

Si vuole costituire un capitale di 75000 euro versando 10 rate annuali posticipate al tasso annuo del 5.5%.

a) Calcolare l'ammontare della rata;

b) dopo il versamento della sesta rata, si vuole aumentare di 5000 euro il capitale da costituire.

Calcolare la nuova rata nei seguenti casi:

b_1. il tasso resta invariato;

b_2. il tasso aumenta dello 0.5%.

•

a) $R = 5825.08$; b) $F_6 = 40123.45$; $M_1 = 49705.92$;

b) Capitale restante da costituire 80000-49705.92 =30294.08

Al tasso invariato $R_{new} = 6976.56$; al tasso del 6% $R_{new} = 6924.97$.

Esercizio 1.6.17

Si vuole costituire tra 4 anni un capitale di 10000 euro versando 4 rate posticipate costanti al tasso del 3%.

Redigere il piano di costituzione.

•

Si ha $R = 2390.27$.

k	i	I_k	R_k	F_k
1	-	-	2390.27	2390.27
2	3%	71.71	2390.27	4852.25
3	3%	145.57	2390.27	7386.60
4	3%	221.60	2390.27	circa 10000

Esercizio 1.6.18

Si vuole costituire tra 3 anni un capitale di 1500 euro versando 3 rate posticipate costanti al tasso del 2%.

Redigere il piano di costituzione.

•

Si ha $R = 490.13$.

k	i	I_k	R_k	F_k
1	-	-	490.13	490.13
2	3%	9.80	490.13	990.16
3	3%	19.80	490.13	1500

1.6.4 Costituzione di un capitale con rate anticipate

Il cambiamento rispetto al caso di rata anticipata consiste nel fatto che adesso le rate sono versate all'inizio di ogni periodo ad iniziare dal tempo zero.

Il versamento immediato della prima rata implica che

• il versamento della k-ma rata avviene al tempo $t = k - 1$;

• al termine del tempo $t = k$, sono state versate $k + 1$ rate.

Se ad esempio vogliamo costituire un capitale M in 4 anni, la prima rata R_0 è versata al tempo zero, la seconda rata R_1 è versata al tempo tempo 1, la terza

rata R_2 è versata al tempo tempo 2 e la quarta rata R_3 è versata al tempo 3.
In particolare, il montante accumulato all'atto dell'ultima rata deve essere capitalizzato di un anno per ottenere il capitale desiderato M.
Il montante all'epoca del versamento della $(k+1)-ma$ (equivalentemente, al termine del tempo $t=k$), rata è detto **fondo di costituzione al tempo k** e denotato con F_k.
Ad esempio, F_3 è il fondo a disposizione al termine del terzo periodo $t=3$ costituito dal versamento di 4 rate.
In generale, se le rate sono n, denoteremo con
$R_0,\ R_1, ..., R_{n-1}$ le $n-rate$ e con
$F_0,\ F_1, ..., F_{n-1}, F_n$ i fondi costituiti con $F_n = M$.
Nel caso di rate costanti uguali a R e ha al tasso di interesse i, essendo F_k il montante accumulato dovuto al versamento di (k+1) rate, si ha

$$F_k = \frac{R}{i}\big[(1+i)^{k+1}-1\big],\ k=0,1,...,n-1;\quad F_n = F_{n-1}(1+i) = M \qquad (1.6.4)$$

In particolare

$$M = \frac{R}{i}\big[(1+i)^n-1\big](1+i);\qquad R = \frac{M\cdot i}{\big[(1+i)^n-1\big](1+i)} \qquad (1.6.5)$$

Tutto quanto svolto nel caso di rata posticipata sarà ripetuto per il caso di rata anticipata con opportuni adattamenti dei dati.
La relazione tra montante e rata nei due casi è:
montante anticipata = montante posticipata moltiplicato per 1+i;
rata anticipata = rata posticipata divisa per 1+i.

Esempio 1.6.13 Si vuole costituire un capitale di 16000 euro in 10 anni con rate costanti annuali anticipate al tasso annuo del 3.5%.
a) Calcolare l'importo della rata;

b) calcolare il fondo costituito dopo 5 anni;

c) calcolare il fondo costituito dopo il versamento delle prime 4 rate.

•

a) Si ha $M = 16000,\ n = 10,\ i = 3.5\%$. Applicando la (1.6.5) si ha
$R = \dfrac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \dfrac{16000 \cdot 0.035}{\big[(1.035)^{10} - 1\big] \cdot 1.035} = 1317.96.$
b) Si deve calcolare il montante accumulato in 5 anni con versamento di rata anticipata. Applicando la (1.6.4) si ha
$F_5 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^6 - 1\big] = \dfrac{1317.96}{0.035}\big[(1.035)^6 - 1\big] = 8632.64.$
b) Si deve calcolare il montante dovuto al versamento di 4 rate disponibile al terzo anno. Applicando la (1.6.4) si ha
$F_3 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^4 - 1\big] = \dfrac{1317.96}{0.035}\big[(1.035)^4 - 1\big] = 5548.61.$

Esempio 1.6.14

Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 5 anni con rate trimestrali costanti anticipate al tasso annuo nominale convertibile 4 volte l'anno del 8%.

a) Calcolare l'importo della rata.

b) calcolare il fondo costituito all'atto del versamento della settima rata.

•

a) Si ha $i_4 = \dfrac{j_4}{4} = 2\%$. Tenuto conto che 5 anni corrispondono a 20 trimestri, i dati del problema divengono: M=10000, n= 20, i=2%.

Applicando la (1.6.5) si ha
$R = \dfrac{10000 \cdot 0.02}{\big[(1.02)^{20} - 1\big] \cdot 1.02} = 403.55.$
b) Si ha $F_6 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^7 - 1\big] = \dfrac{403.55}{0.02}\big[(1.02)^7 - 1\big] = 2998.39.$

Esempio 1.6.15

Si vuole costituire un capitale di 12000 euro in 8 anni al tasso annuo del 6.09% con rate semestrali costanti anticipate.

a) Calcolare l'importo della rata.

b) calcolare il fondo costituito all'atto del versamento della decima rata.

•

a) Essendo le rate semestrali, occorre preliminarmente calcolare il tasso semestrale. Si ha $(1+i_2)^2 = 1+i = 1.0609$ da cui $1+i_2 = 1.03$, $i_2 = 3\%$.

Tenuto conto che 8 anni corrispondono a 16 semestri, i dati del problema divengono: M=12000, n=16, i=3%.

Applicando la (1.6.5) si ha

$R = \dfrac{12000 \cdot 0.03}{\big[(1.03)^{16} - 1\big] \cdot 1.03} = 578.03.$

b) Si ha $F_9 = \dfrac{578.03}{0.03}\big[(1.03)^{10} - 1\big] = 6630.$

Esempio 1.6.16

Si vuole costituire un capitale in 15 anni con rate annuali al tasso $i = 4\%$.

All'atto del versamento della ottava rata si sono accumulati 11059.09 euro.

Calcolare il capitale che si vuole costituire.

•

Sappiamo che $F_7 = \dfrac{R}{i}\big[(1+i)^8 - 1\big] = 11059.09$, da cui

$R = \dfrac{11059.09 \cdot 0.04}{1.04^8 - 1} = 1200.76.$

Conoscendo la rata possiamo ora calcolare il capitale desiderato.

Si ha $M = \dfrac{R}{i}[(1+i)^{15} - 1\big] \cdot (1+i) = \dfrac{1200.76}{0.04}[(1.04)^{15} - 1\big] \cdot 1.04 = 25000.$

Esempio 1.6.17 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 20000 euro mediante versamenti annuali anticipati, d'importo pari a 1514 euro, al tasso effettivo annuo $i = 5\%$.

•

Iniziamo a scrivere la formula del montante:

$M = \dfrac{1514}{0.05}(1.05^n - 1\big) \cdot (1.05) = 20000.$ Svolgendo i calcoli abbiamo

$31794(1.05^n - 1) = 20000$, da cui $1.05^n - 1 = \dfrac{20000}{31794} = 0.629, \;\; 1.05^n = 1.629$.
Infine $n = \dfrac{\log 1.629}{\log 1.05} = 10$.

Esempio 1.6.18 Si vuole costituire un capitale di 20000 euro in 12 anni con rate costanti annuali anticipate al tasso annuo del 4%.

Calcolare l'importo della rata sapendo che ogni anno è applicata sugli interessi una ritenuta fiscale del 20%.

•

La ritenuta fiscale del 20% implica che l'interesse viene calcolato sull'80% di quello stabilito, ovvero $4 \cdot \frac{80}{100} = 3.2\%$. Si ha $M = 16000,\; n = 12,\; i = 3.2\%$. Applicando la (1.6.5) si ha

$$R = \frac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \frac{12000 \cdot 0.032}{\big[(1.032)^{12} - 1\big] \cdot 1.032} = 810.06.$$

Esempio 1.6.19

a) Vogliamo accantonare un capitale finale di 25.000 euro mediante il versamento di 10 rate annuali costanti anticipate al tasso effettivo annuo del 10%.

Calcolare la rata da versare annualmente.

b) Dopo aver versato le prime 2 rate, non versiamo le 2 rate successive (la terza e la quarta) e riprendiamo il versamento dalla quinta rata con lo stesso importo iniziale.

Quanto potremo ottenere alla fine del decimo anno?

•

Per la rata iniziale si ha

$$R = \frac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \frac{25000 \cdot 0.1}{\big[(1.1)^{10} - 1\big] \cdot 1.1} = 1426.03.$$

La sequenza dei versamenti e dei corrispettivi tempi è data da

$(R, 0)\ (R, 1),\ (0, 2),\ (0, 3),\ (R, 4),\ (R, 5),\ (R, 6),\ (R, 7),\ (R, 8),\ (R, 9),\ (0, 10)$.

Il montante dopo i primi due versamenti, ovvero alla fine del primo periodo (k=1) è $F_1 = \frac{R}{i}\big[(1+i)^2 - 1\big] = \frac{1426.03}{0.1}\big[(1.1)^2 - 1\big] = 2994.6666$. Il capitale F_1 produce alla scadenza (ovvero dopo altri 9 periodi) un montante pari a $M_1 = F_1(1.1)^9 = 7061.2672$.

Si devono versare ancora 6 rate anticipate che producono alla scadenza un montante M_2 pari a $M_2 = \frac{R}{i}\big[(1+i)^6 - 1\big](1+i) = \frac{1426.03}{0.1}\big[(1.1)^6 - 1\big] \cdot 1.1 = 12102.975$.

Alla fine del decimo anno si dispone di un capitale pari a

$7061.2672 + 12102.975 = 19164.242$.

Esempio 1.6.20

Si vuol costituire in 10 anni un capitale di 100.000 euro con un piano composto da 10 rate costanti immediate anticipate. Calcolare l'entità delle rate assumendo per l'intero piano un tasso costante $i = 5\%$.

Dopo le prime 4 rate si decide di non pagare le due rate successive e di versare una settima rata di 20.000 euro; si porta quindi a compimento la costituzione del capitale con le ultime tre rate costanti. Calcolare l'entità delle ultime tre rate assumendo, a partire dal pagamento della settima rata, un tasso costante $i = 6\%$.

Per la rata iniziale si ha

$$R = \frac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \frac{1000000 \cdot 0.05}{\big[(1.05)^{10} - 1\big](1.05)} = 7571.86.$$

La sequenza dei pagamenti è data da

$R,\ R,\ R,\ R,\ 0,\ 0,\ 20000,\ R^*,\ R^*,\ R^*.$

Calcoliamo dapprima il montante generato dalle prime quattro rate, ovvero F_3 rispetto alle notazioni usate.

$$F_3 = \frac{R}{i}\big[(1+i)^4 - 1\big] = \frac{7571.86}{0.05}\big[(1.05)^4 - 1\big] = 32635.66.$$

Il montante F_3 produce all'epoca corrispondente a $F_{10} = S$ un montante M_1 ottenuto capitalizzando F_3 di sette annualità , di cui tre al tasso del 5% e quattro al tasso del 6%; si ha $M_1 = 32635.66 \cdot 1.05^3 \cdot 1.06^4 = 47246.23$.

Il capitale di 20000 euro produce all'epoca finale un montante pari a

$M_2 = 20000 \cdot 1.06^4 = 25249.54.$

Il montante prodotto dalle tre rate anticipate R^* è dato da

$M_3 = \dfrac{R^*}{0.06}\left[(1.06)^3 - 1\right](1.06) = R^* \cdot 3.37.$

Il capitale che si vuole accumulare è la somma di tutti i singoli montanti.

Ne segue che $100000 = 47246.23 + 25249.54 + 4.64R^*$, da cui $R^* = 5927.64$.

Esempio 1.6.21

Si vuole costituire un capitale di 5000 euro in 7 anni con rate anticipate al tasso $i = 6\%$.

Sapendo che le prime 3 rate sono il doppio delle restanti, calcolare l'importo delle due rate.

•

Denotiamo con R l'importo della rata a partire dal quarto versamento; $2R$ diviene l'importo delle prime tre rate.

Le prime 3 rate producono un fondo pari a

$F_3 = \dfrac{2R}{0.06}\left[(1.06)^3 - 1\right] = 6.36R$. Tale ammontare produce un montante finale uguale a $M_1 = F_3 \cdot (1.06)^4 = 6.36 \cdot 1.26R = 8.03R$.

Le restanti 4 rate producono un montante finale dato da

$M_2 = \dfrac{R}{0.06}\left[(1.06)^4 - 1\right] = 4.38R.$

Il montante finale diviene $M = 5000 = M_1 + M_2 = (8.03 + 4.38)R = 12.41R$, da cui $R = 402.90$.

L'importo delle prime tre rate è uguale a 805.80 euro mentre quello delle rate successive è di 402.90 euro.

• Il piano di costituzione

Per la costituzione di un capitale si redige un prospetto detto **piano di costituzione** che evidenzia il capitale che via via si accumula nel tempo:

Il piano di costituzione è del tipo (nel caso di versamento di 4 rate)

k	i	I_k	R_k	F_k
0	-	-		
1				
2				
3				
4				

Ove R_k denota la k-ma rata versata e F_k denota il fondo costituito all'inizio del periodo k; si ha la relazione

$$F_k = F_{k-1} + i \cdot F_{k-1} + R_k, k = 1, ..., n \qquad (1.6.6)$$

con la convenzione $F_{-1} = 0,\ R_n = 0$ che permette di redigere agevolmente il piano di costituzione

Esempio 1.6.22

Calcolare il capitale accumulato dopo 4 anni in seguito al versamento delle seguenti rate anticipate al tasso del 5%: 200, 230, 250, 252,40.

•

Si riportano i versamenti effettuati (rate) nella quarta colonna;
ovviamente per $k = 0$ si ha $R_0 = 200,\ F_0 = 200$ in quanto alla prima rata si ha uguaglianza tra fondo costituito e rata versata.
Per $k = 1$, applicando la (1.6.6) si calcola l'interesse $I_1 = 200 \cdot 5\% = 10$;
si effettua la somma dei numeri $200 + 10 + 230 = 440$.
Similmente, per $k = 2$, si calcola l'interesse $I_2 = 440 \cdot 5\% = 22$ e si effettua la somma dei numeri $440 + 22 + 250 = 712$ e così via.

k	i	I_k	R_k	F_k
0	-	-	200	200
1	5%	10	230	440
2	5%	22	250	712
3	5%	35.6	252.4	1000
4	5%	50	0	1050

Al quarto anno si è accumulato 1050 Euro.

Esempio 1.6.23

Si vuole costituire un capitale di 60000 euro in tre anni tramite tre versamenti anticipati costanti al tasso del 5%. Redigere il piano di costituzione.

•

La rata costante è $R = \dfrac{M \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \dfrac{60000 \cdot 0.05}{\big[(1.05)^3 - 1\big](1.05)} = 18126.20.$

k	i	I_k	R_k	F_k
0	-	-	18.126.20	18126.20
1	5%	906.31	18126.20	37158.72
2	5%	1857.94	18126.20	57142.86
3	5%	2587.14	0	60000

Esempio 1.6.24

Si vuole costituire tra 4 anni un capitale di 1000 euro versando 4 rate anticipare costanti al tasso del 5%.

Redigere il piano di costituzione.

La rata costante è $R = \dfrac{S \cdot i}{\big[(1+i)^n - 1\big](1+i)} = \dfrac{1000 \cdot 0.05}{\big[(1.05)^4 - 1\big](1.05)} = 221.$

k	i	I_k	R_k	F_k
0	-	-	221	221
1	5%	11.05	221	453.05
2	5%	22.65	221	696.7
3	5%	34.84	221	952.54
4	5%	47.60	0	1000

1.6.5 Esercizi

Esercizio 1.6.19

Si vuole costituire un capitale di 6000 euro in 4 anni con rate costanti anticipate al tasso del 3,5%.

Calcolare l'importo della rata.

• $R = 1376.14$.

Esercizio 1.6.20

Si vuole costituire un capitale di 20000 euro versando 12 rate annuali anticipate al tasso annuo del 5%.

Calcolare l'ammontare della rata.

• $R = 1156.74$.

Esercizio 1.6.21

Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 15 anni con rate costanti anticipate al tasso del 3%.

a) Calcolare l'importo della rata;

b) calcolare il fondo costituito al sesto anno. •

a) $R = 521.92$; b) $F_6 = 76600$.

Esercizio 1.6.22

Si vuole costituire un capitale di 12000 euro versando per 3 anni rate semestrali costanti anticipate al tasso annuo del 4.04%.

Calcolare la rata e il fondo di costituzione al secondo anno.

•

$i_2 = 2\%$; $R = 1866.25$; $F_2 = 11757.37$.

Esercizio 1.6.23

Si vuole costituire un capitale di 20000 euro, versando 5 rate semestrali anticipate al tasso di interesse annuo del 6.09%.

a) Calcolare la rata da versare.

b) calcolare il fondo costituito all'atto del versamento della quinta rata.

•

a) $R = 1693.48$; $F_4 = 106200$.

Esercizio 1.6.24

Si vuole costituire un capitale di 30000 euro in 5 anni con rate costanti anticipate al tasso annuo nominale convertibile 3 volte l'anno del 6%.

Calcolare l'importo della rata.

• $i_3 = 2\%$, $R = 1700.68$.

Esercizio 1.6.25

Si vuole costituire un capitale di 6000 euro in 3 anni con rate costanti anticipate trimestrali del 2,5%.

Calcolare l'importo della rata.

• $R = 424.32$.

Esercizio 1.6.26

Si vuole costituire un capitale in 10 anni con rate annuali al tasso $i = 2.5\%\%$.

All'atto del versamento della sesta rata si sono accumulati 11411.15 euro.

Calcolare il capitale che si vuole costituire.

•

$M = 20000$.

Esercizio 1.6.27

Si vuole costituire un capitale in 5 anni con rate annuali al tasso $i = 3.5\%\%$.

All'atto del versamento della terza rata si sono accumulati 4641.44 euro.

Calcolare il capitale che si vuole costituire.

•

$M = 8000$.

Esercizio 1.6.28 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 6000 euro mediante versamenti annuali anticipati, d'importo pari a 383.88 euro, al tasso effettivo annuo $i = 4\%$.

•

. n= 12

Esercizio 1.6.29 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 15000 euro mediante versamenti annuali anticipati, d'importo pari a 631.845 euro, al tasso effettivo annuo $i = 4.5\%$.

•

. n= 16

Esercizio 1.6.30 Determinare il numero delle rate necessarie per costituire un capitale di 2740 euro mediante versamenti mensili, anticipati, d'importo pari a

335, al tasso effettivo annuo $i = 6\%$.

•. n=8.

Esercizio 1.6.31 Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 8 anni con rate semestrali anticipate al tasso $i_2 = 1.5\%$.
Calcolare l'importo della rata sapendo che ogni anno è applicata sugli interessi una ritenuta fiscale del 10%.

•

Tasso effettivo 1.35%. $R = 557.16$.

Esercizio 1.6.32 Si vuole costituire un capitale di 10000 euro in 20 anni con rate annuali anticipate al tasso $i = 4\%$.
Calcolare l'importo della rata sapendo che ogni anno è applicata sugli interessi una ritenuta fiscale del 15%.

•

Tasso effettivo 3.4%. $R = 345.51$.

Esercizio 1.6.33 Due genitori vogliono accantonare dei soldi da regalare al proprio figlio quando raggiungerà la maggiore età. A tal fine, viene loro proposta dalla banca una operazione finanziaria di costituzione di capitale a tasso fisso con rate costanti immediate anticipate.
a) Supponendo che si voglia accantonare un capitale finale di 25000 euro in 10 rate annuali al tasso effettivo annuo del 6%, calcolare la rata.
b) Subito dopo il pagamento della rata numero 5 i genitori decidono di aumentare a 35000 euro il capitale finale da accantonare. Calcolare l'ammontare delle 5 rate rimanenti tenendo conto che il tasso effettivo annuo rimane invariato.

•

$R = 1789.55; F_4 = 10701.51; M_1 = 15180.30$ capitale accumulato alla fine decimo anno.

Capitale da accumulare con le restanti 5 rate: 35000-15180.30=19819.70.

$R_{new} = 3314.33$.

Esercizio 1.6.34

Si vuole costituire un capitale di 75000 euro versando 10 rate annuali anticipate al tasso annuo del 6.25%.

a) Calcolare l'ammontare della rata;

b) dopo il versamento della sesta rata il tasso di interesse aumenta dello 0.25%. Calcolare la nuova rata.

•

R= 5292.8319. $F_5 = 39474.421$, $M_1 = F_5(1.0625)^5 = 53451.57$; da costituire 75000-53451.57=21548.43 in 5 anni con 4 rate anticipate al tasso 6.5%.

$R_{new} = 4590.98$.

Esercizio 1.6.35

Si vuole costituire un capitale di 75000 euro versando 10 rate annuali anticipate al tasso annuo del 5.5%.

a) Calcolare l'ammontare della rata;

b) dopo il versamento della sesta rata, si vuole aumentare di 5000 euro il capitale da costituire.

Calcolare la nuova rata nei seguenti casi:

b_1. il tasso resta invariato;

b_2. il tasso aumenta dello 0.5%.

•

a) $R = 5522.83$; b) $F_5 = 40150.97$; $M_1 = 52475.71$;

b) Capitale restante da costituire 80000-52475.71=27524.29.

Al tasso invariato $R_{new} = 6009.67$; al tasso del 6% $R_{new} = 5931.96$.

Esercizio 1.6.36

Si vuole costituire tra 5 anni un capitale di 10000 euro versando 4 rate anticipare costanti al tasso del 3%.

Redigere il piano di costituzione.

•

Si ha $R = 2320.18$.

k	i	I_k	R_k	F_k
0	-	-	2320.18	2320.18
1	3%	69.61	2320.18	4709.97
2	3%	141.30	2320.18	7171.45
3	3%	215.14	2320.18	9706.77
4	3%	291.20	0	circa 10000

Esercizio 1.6.37

Si vuole costituire tra 3 anni un capitale di 1500 euro versando 3 rate anticipare costanti al tasso del 2%.

Redigere il piano di costituzione.

•

Si ha $R = 480.77$.

k	i	I_k	R_k	F_k
0	-	-	480.77	480.77
1	3%	9.61	480.77	971.15
2	3%	19.42	480.77	1471.34
3	3%	29.43	0	circa 1500