Lezione 3
Alcuni richiami di Matematica.

Maurizio Pratelli

Esponenziali a esponente intero o razionale

Se a è un numero positivo ed m un intero positivo, si definisce $a^m = a \times a \times .. \times a$, m volte.

Inoltre con a^{-m} si intende $\frac{1}{a^m}$ e con $a^{\frac{1}{n}}$ la radice n-sima di a.

Sono immediate le seguenti proprietà:

- $a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$
- $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$

Questo permette di definire a^p, dove $p = \frac{m}{n}$ è un numero razionale, come $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$, cioè radice n-sima di a^m.

Esponenziali generali

Se $a > 0$ e x è un numero reale qualsiasi, è definito l'esponenziale a^x (che estende la definizione data se x è razionale).

Le proprietà essenziali della funzione esponenziale sono le seguenti:

- $a^{x+y} = a^x \,.\, a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$

Grafico della funzione $x \to a^x$: caso $a > 1$

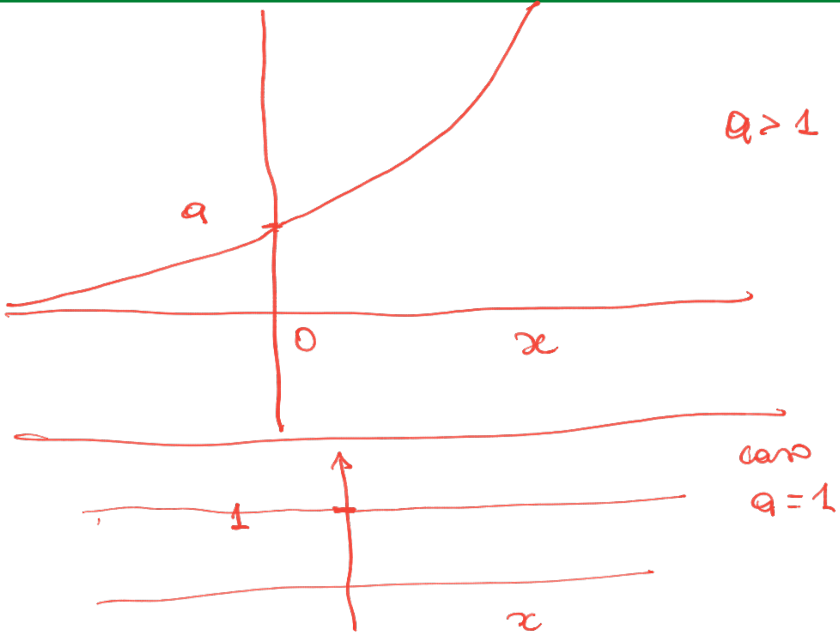
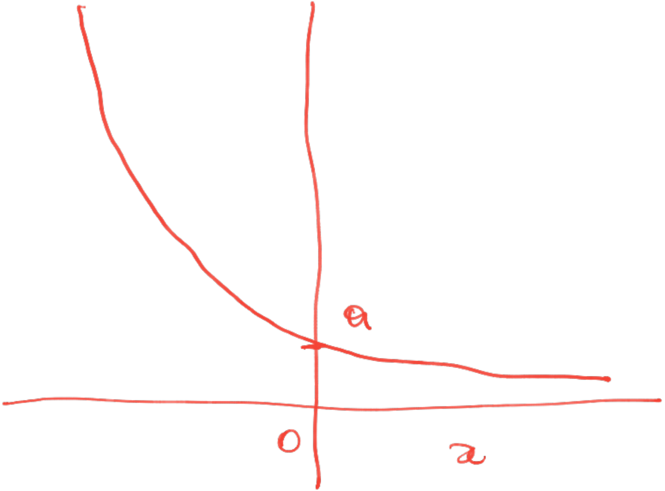


Grafico della funzione $x \to a^x$: caso $a < 1$

$a < 1$



Sia a un numero positivo (diverso da 1), e $x > 0$: si chiama logaritmo in base a di x e si indica $\log_a(x)$ il numero t tale che $a^t = x$.

Usualmente con *log* si intende il logaritmo in base 10 e con *ln* il logaritmo (detto anche naturale) in base e, dove $e = 2{,}78..$ è il numero di Nepero. Il logaritmo in base 10 è quello più usato in Economia (o Ingegneria), e quello in base e il più usato in Analisi Matematica.

A noi serviranno solo le proprietà essenziali dei logaritmi, che sono:

- $\log(x.y) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(x^b) = b\log(x)$

e da queste due derivano

- $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$.

Una formula di uso frequente

Vedremo più avanti che viene utile la seguente formula, dove *a* è un numero positivo diverso da 1

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Una conseguenza immediata della precedente è la seguente

$$a^k + a^{k+1} + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - a^k}{a - 1}$$

Una dimostrazione di questa formula verrà data nella Lezione 7

Equazioni di secondo grado

Consideriamo l'equazione di secondo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni date da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Discussione delle soluzioni

- se $b^2 - 4ac > 0$, ci sono due soluzioni reali distinte
- se $b^2 - 4ac = 0$, ci sono due soluzioni reali coincidenti
- se $b^2 - 4ac < 0$, ci sono due soluzioni immaginarie (a valori complessi)