

Lezione 12

Esempi di rendite, leasing, costituzione di capitali

Maurizio Pratelli

UN ESEMPIO DI RENDITA

Pianificare una rendita significa investire una somma di denaro per garantire un flusso futuro di denaro con certe scadenze prefissate.

Tipicamente le rendite sono **periodiche**, possono essere **anticipate** o **posticipate**, **immediate** o **differite**, ...

È importante precisare che un problema di rendita è un **problema di attualizzazione**.

Esercizio 1. Voglio investire oggi (01/12/22) una somma di denaro per garantire una rendita di 400 € mensili a partire dal 1/09/23 per la durata di 3 anni (per permettere a un nipote di frequentare una laurea triennale).

La rendita sarà erogata all'inizio di ogni mese, e la banca riconosce sulle somme depositate un interesse del 2,2 % annuo.

Quale somma devo investire?

Osservazione: si tratta di una rendita **anticipata** (il versamento è all'inizio del mese) e **differita** (l'inizio della rendita non è immediato ma dopo 9 mesi)

senza interessi

$$400 \times 36 = 14.400$$

*con gli interessi
un aspetto un
altro inferiore*

Guida alla soluzione:

- conviene misurare il tempo in mesi e quindi trasformare l'interesse del 2,2 % (che è un interesse annuo con capitalizzazione composta) in interesse mensile equivalente
- si tratta di calcolare il valore attuale al 1/12/22 della somma R ($R = 400$ €) tra 9 mesi, 10 mesi ... fino a 44 mesi.

$$(1 + \dot{i}_{12})^{12} = 1,022$$

$$\dot{i}_{12} = 1,022^{1/12} - 1 = 0,00181$$

$$\frac{400}{(1+i)^9} + \dots + \frac{400}{(1+i)^{44}} =$$

$$= 400 \left(\frac{1}{(1+i)^9} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{44}} \right)$$

$$q = \frac{1}{(1+i)} = 1,00181^{-1}$$

$$q^9 + \dots + q^{44} = \frac{q^{45} - q^9}{q - 1} =$$

$$= \frac{1,00181^{-45} - 1,00181^{-9}}{1,00181^{-1} - 1} =$$

$$\Rightarrow 34,321$$

Somma do investimento:

$$400 \times 34,321 = 13728,62$$

UN ESEMPIO DI COSTITUZIONE DI CAPITALE

Questa volta si tratta di pianificare dei versamenti (con una certa scadenza temporale, anticipati o posticipati, ...) al fine di poter disporre di una certa somma a una data prefissata.

In questo caso si tratta di un **problema di capitalizzazione**.

Esercizio 2 Voglio poter disporre, alla data 1/01/27, della somma di 40.000 € : a tale scopo intendo effettuare un versamento all'inizio di ogni trimestre a partire dal 1/01/23, sapendo che la banca riconosce sulle somme versate un interesse dello 1,9 % annuo.

Quale somma devo versare ogni volta?

Osservazione: i versamenti sono anticipati, per una durata totale di 16 trimestri.

senza interessi

$$\frac{40.000}{16} = 2500$$

*su questo aspetto non
c'ho un po' info=
zione.....*

Guida alla soluzione:

- conviene misurare il tempo in trimestri e quindi trasformare l'interesse dello 1,9 % in interesse trimestrale equivalente
- si tratta di rivalutare una somma R (da calcolare) per 16, 15 ... fino a 1 semestre, in modo che la somma dei versamenti ricapitalizzati porti a 40.000 € .

$$(1 + i_4)^4 = 1,019 \quad i_4 = 1,019^{1/4} - 1 =$$

$$= 0,00471$$

interesse trimestrale

R = versamento da calcolare

$$R \times 1,00471^{16} + R \times 1,00471^{15} + \dots + R \times 1,00471 =$$
$$\Rightarrow R (a + a^2 + \dots + a^{16}) = 40.000$$

$$a = 1,00471$$

Costituzione di capitali

$$a + a^2 + \dots + a^{16} = \frac{a^{17} - a}{a - 1} =$$

$$= \frac{1,00471^{17} - 1,00471}{0,00471} = 16,655$$

$$R = \frac{40.000}{16,65} = 2402,40$$

Costituzione di capitali

Senza interessi

$$R = \frac{40.000}{16} =$$

$$= 2500$$

Con interessi

$$R = \frac{40.000}{16,65} =$$

$$= 2402,40$$

UN ESEMPIO DI LEASING

Un **contratto di Leasing** prevede, per il possesso di un bene di un certo valore A , il pagamento di un **affitto** R per un certo numero di scadenze e al termine la possibilità di restituire il bene oppure di diventarne proprietario pagando un certo **valore di riscatto** V .

Se le rate sono n , sono posticipate e vengono pagate in un certo intervallo di tempo sul quale vale un tasso di interesse i , deve valere l'equazione

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n} + \frac{V}{(1+i)^n}$$

Se invece le rate sono anticipate vale una formula simile cambiando però gli esponenti di $(1+i)$, bisogna poi fare attenzione se il momento del possibile riscatto coincide con l'ultima rata o è posteriore ... in ogni caso si tratta generalmente di un **problema di attualizzazione**.

Esercizio 3 Per l'acquisto di una vettura del prezzo di 18.000 € il concessionario propone la seguente formula di pagamento:

- 1000 € al momento della consegna
- 48 rate mensili anticipate di 249 €
- al termine dei 4 anni di affitto si può scegliere tra restituire la vettura o riscattarla.

L'interesse medio per i finanziamenti di vetture è del 6 % annuo: qual è il giusto valore di riscatto?

Osservazione: fare attenzione al fatto che la prima rata si paga immediatamente, mentre l'eventuale riscatto avviene al termine del 48-simo mese. In questo esempio conviene misurare il tempo in mesi (e calcolare l'interesse mensile equivalente nel senso degli interessi composti).

Leasing

$$(1 + i_{12})^{12} = 1,06 \quad i_{12} = 1,06^{1/12} - 1 = 0,0048$$

l'interesse nel periodo è 0,48%

$$18.000 = 1000 + 249 + \frac{249}{1+i} + \dots + \frac{249}{(1+i)^{47}} + \frac{V}{(1+i)^{48}}$$

ovvero

$$17.000 = 249 \left(1 + \frac{1}{1+i} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{47}} \right) + \frac{V}{(1+i)^{48}}$$

$$1+i = 1,0048$$

$$1 + \dots + \frac{1}{(1+i)^{47}} = \frac{1,0048^{-48} - 1}{1,0048^{-1} - 1} = 42,38$$

$$17.000 - 249 \times 42,98 = \frac{V}{1,0048^{48}}$$

e quindi

$$V = 1,0048^{48} (17.000 - 249 \times 42,98) =$$

$$= 7925,43$$

↑
 ↳ Valore di riscatto dopo
 4 anni di affitto

