UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte II** — Scritto del 23/7/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

2. Risolvere $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

3. Trovare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 24 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione $3x + 23y + 8z = 0$.

4. Se un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$ è surgettiva, che dimensione ha $\mathrm{Ker}(f)$?

5. Per la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare il coefficiente di posto $(2,3)$ della matrice M^{-1}.

6. Per la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ trovare gli autovalori con le loro molteplicità algebriche e geometriche.

Istituzioni di Matematica I / **Parte II** — Scritto del 23/7/25 — Esercizio

In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio W avente base $\mathcal{B} = (w_1,\ w_2)$ con $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Esibire un'equazione cartesiana di W.

(B) (3 punti) Esibire la matrice P della proiezione ortogonale su W verificando che $P \cdot P = {}^{t}P = P$.

(C) (2 punti) Ortonormalizzare la base $\mathcal{B}$ di W assegnata.

(D) (2 punti) Provare che la formula $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -x+2y \\ x+7y \\ 3x+3z \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare $f : W \to W$ e che tale f è diagonalizzabile.

Risposte ai quesiti

1. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\cdot(x-2)+c$

2. $y(x) = \mathrm{e}^{3x}\cdot(2\sin(2x)-\cos(2x))$

3. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. 4

5. $-\frac{13}{5}$

6. 1 con m.a. 2 e m.g. 1; 2 con m.a. e m.g. 1

Soluzione dell'esercizio

(A) $2x - y + 3z = 0$

(B) $P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 13 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(D) Si ha $f(w_1) = w_1 + w_2$ e $f(w_2) = 2w_1 + w_2$; poiché f naturalmente rispetta le combinazioni lineari, ne segue che $f(w) \in W$ per ogni $w \in W$ e che f è lineare. Inoltre $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dunque f ha polinomio caratteristico $t^2 - 2t - 1$ con discriminante 8; ne segue che ha due autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile