UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte II** — Scritto del 8/7/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $\quad F(x)=\int_x^5 \log_2(7+t^2)\,\mathrm{d}t \quad$ calcolare $F'(3)$.

2. Calcolare $\quad \displaystyle\int \frac{x^2}{2x^2-x-3}\,\mathrm{d}x.$

3. Risolvere $\quad \begin{cases} y'=(1+y^2)\cdot\cos(x) \\ y(0)=1. \end{cases}$

4. Trovare la matrice associata all'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ data da $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x-y \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\quad \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^2$ sia in partenza sia in arrivo.

5. In $\mathbb{R}^3$ calcolare la distanza tra i punti $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

6. Stabilire per quali $t\in\mathbb{R}$ risulta diagonalizzabile la matrice $\quad \begin{pmatrix} t^2+2t+2 & 2t^2+2t \\ -t-1 & -t \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I / **Parte II** — Scritto del 8/7/25 — Esercizio

Considerare:

- Il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ di equazione $\quad 5x + 3y - 4z = 0;$
- I vettori $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$
- Il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $\quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$
- L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$

Risolvere i seguenti problemi:

(A) (3 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2)$ è una base di V e calcolare le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di v.

(B) (2 punti) Provare che $V + W = \mathbb{R}^3$.

(C) (2 punti) Provare che f è invertibile.

(D) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane per $f(W)$.

Risposte ai quesiti

1. -4

2. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}\log|x+1| + \frac{9}{20}\log|2x-3| + c$

3. $\tan\left(\sin(x) + \frac{\pi}{4}\right)$

4. $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

5. $5\sqrt{2}$

6. $t \neq 2$

Soluzione dell'esercizio

(A) V ha dimensione 2 e i vettori di $\mathcal{B}$ sono 2, soddisfano l'equazione che definisce V e sono linearmente indipendenti; $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) w non soddisfa l'equazione di V, dunque $V \cap W = \{0\}$, da cui segue che $V + W$ ha dimensione 3, dunque è $\mathbb{R}^3$

(C) $\det(M) = -29 \neq 0$

(D) $\begin{cases} 11x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$