UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte II** — Scritto del 12/6/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

2. Risolvere $\begin{cases} y' = 2x \cdot y + \mathrm{e}^{x^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

3. I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linarmente indipendenti? Generano $\mathbb{R}^3$?

4. Stabilire al variare di $t \in \mathbb{R}$ quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} (t-2)x - 6y = t + 10 \\ (1-t)x + (t+5)y = t - 5. \end{cases}$

5. In $\mathbb{R}^3$ ortonormalizzare la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

6. In $\mathbb{R}^3$ trovare un'equazione cartesiana del piano generato dai vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I / **Parte II** — Scritto del 12/6/25 — Esercizio

Considerare le matrici $M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ -10 & -7 & -11 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V di equazione $x + y + z = 0$ e i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2)$ è una base di V.

(B) (3 punti) Trovare una base del nucleo di M e verificare che M ha immagine V.

(C) (2 punti) Provare che la formula $f(v) = M \cdot v$ definisce un'applicazione lineare $f : V \to V$ e che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = N$.

(D) (3 punti) Dire se N sia diagonalizzabile.

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}\cdot(2x-1)+c$

2. $y(x)=(x+1)\cdot\,\mathrm{e}^{x^2}$

3. No e no

4. Infinite per $t=-1$, nessuna per $t=4$, una altrimenti

5. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

6. $-5x+19y+17z=0$

Soluzione dell'esercizio

(A) V ha dimensione 2 e i 2 vettori di $\mathcal{B}$ appartengono a V e sono linearmente indipendenti

(B) Il nucleo di f ha base $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, dunque ha dimensione 1 e l'immagine di f ha dimensione 2; le colonne di M generano l'immagine di M e appartengono a V, che ha dimensione 2, dunque l'immagine di M e V coincidono

(C) f manda vettori di V in V e rispetta le combinazioni lineari

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3v_1 + v_2,$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1 + v_2$$

(D) No, ha autovalore 2 doppio ma non è diagonale