UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 23/7/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Esplicitare la negazione della proposizione
"In via dei Prati a Udine tutte le famiglie hanno adottato un cane o possiedono una macchina rossa".

2. Quante sono le possibili sequenze di esiti del lancio successivo di una moneta per 10 volte?

3. Esprimere $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ come funzione di $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2(\mathrm{e}^x-1)}{1-\cos(3x)}$.

5. La funzione $f:\left[0,\frac{1}{\pi}\right]\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x>0\\ 0 & \text{per } x=0\end{cases}$
soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle?

6. La funzione $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=\sin(\log(1+x))$ è convessa o concava su un intervallo opportunamente piccolo contenente il punto $x=0$?

7. Verificare che alla funzione $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=2x^3-4x^2+x+1$ si applica il metodo iterativo di ricerca di uno zero tramite le tangenti al grafico, e dire da quale estremo deve iniziare l'iterazione.

8. Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n)}$ sia convergente e se lo sia assolutamente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora e un quarto. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 23/7/25 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 2x - 1}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande insieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che f definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (4 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D e trovare tutti i suoi asintoti.

(C) (4 punti) Individuare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi punti di massimo e minimo relativo.

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. "In via dei Prati a Udine c'è almeno una famiglia che non ha adottato un cane e non possiede una macchina rossa"

2. 1024

3. $\sin(x) \cdot \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$

4. $-\frac{2}{9}$

5. Sì: $f(0) = f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$, f è continua su $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ e derivabile su $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$

6. Concava

7. $f(-1) = -6 < 0 < 1 = f(0)$
$f'(x) = 6x^2 - 8x + 1 > 0$ su $[-1, 0]$
$f''(x) = 12x - 8 < 0$ su $[-1, 0]$
si inizia dal primo estremo -1

8. È convergente per il criterio di Leibniz, non lo è assolutamente poiché $\frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \geqslant 2$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$

(B) 0 in $-\infty$
$+\infty$ in $(1-\sqrt{2})^-$, in $(1+\sqrt{2})^+$ e in $+\infty$
$-\infty$ in $(1-\sqrt{2})^+$ e in $(1+\sqrt{2})^-$
asintoti verticali $x = -1$ e $x = 2$
asintoto orizzontale sinistro $y = 0$
nessun asintoto obliquo

(C) Posto $p_\pm = 2 \pm \sqrt{3}$, si ha che f è crescente su $(-\infty, -1)$, su $(-1, p_-]$ e su $[p_+, +\infty)$, è decrescente su $[p_-, +2)$ e su $(+2, p_+]$, ha massimo relativo in p_- e minimo relativo in p_+