UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 8/7/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=10}^{20} n - \sum_{n=3}^{6} 2^n.$

2. Se una squadra di calcio ha totalizzato 3 punti in 5 partite, quante diverse strisce di risultati può avere realizzato?

3. Risolvere rispetto a $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $\quad 2z^2 - (2+3i)z - 1 + i = 0.$

4. Trovare lo sviluppo di Taylor del V ordine nel punto $x = 0$ per la funzione $\quad \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{e}^{x^2 - x^3} \in \mathbb{R}.$

5. Il teorema di Lagrange applicato alla funzione $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x) = x^3 + 2^x \quad$ garantisce l'esistenza di $c \in (-2,3)$ tale che $f'(c) = \ldots$

6. Provare che se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile con $f(0) = -4$ e $f(1) = 3$ allora esiste $c \in [0,1]$ tale che $f'(c) > 0$.

7. Trovare tutti gli asintoti della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{x + |x| + 1}.$

8. Dire se la serie $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^3 - n + 2} \quad$ sia convergente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora e un quarto. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 8/7/25 — Esercizio

Considerare l'espressione $\quad f(x) = \dfrac{x}{1+\log(x)}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande insieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che f definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(C) (3 punti) Trovare tutti gli asintoti di f.

(D) (3 punti) Individuare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi punti di massimo e minimo relativo.

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 8/7/25 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. 45

2. 15

3. $z_1 = \frac{i}{2},\ z_2 = 1 + i$

4. $1 + x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^5 + \mathrm{o}(x^5)$

5. $\frac{171}{20}$

6. Se si avesse $f'(x) \leqslant 0$ per ogni $c \in [0, 1]$ la f sarebbe non crescente, dunque si avrebbe $f(0) \geqslant f(1)$

7. Obliquo destro $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

8. Sì poiché il termine n-esimo è asintotico a $\frac{1}{n^2}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$

(B) 0 in 0, $\pm\infty$ in $\left(\frac{1}{e}\right)^{\pm}$, $+\infty$ in $+\infty$

(C) Verticale $x = \frac{1}{e}$

(D) Decrescente su $(0, \frac{1}{e})$ e su $(\frac{1}{e}, 1]$, crescente su $[1, +\infty)$; minimo relativo in 1