UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 12/6/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \{k \in \mathbb{N} : \ k < 7\}$ dove $f(n)$ è il resto della divisione $\quad (2n+1) : 7 \quad$ è iniettiva e/o surgettiva?

2. Calcolare $\quad \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{27}\right) \cdot 64^{-\frac{1}{6}}$.

3. Calcolare, se esiste $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot n^2 - \sin(n)}{3n + 2^{-n}}$.

4. Disporre in ordine crescente di infinitesimo nel punto $x_0 = 0$ le seguenti funzioni definite su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{x^2} - 1 \qquad f_2(x) = \sqrt{|x|} \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \qquad f_4(x) = x - \sin(x).$$

5. Calcolare la derivata della funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x) = \sin(\log(x))$.

6. Dire se il limite $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \quad$ si possa calcolare con la regola di de l'Hôpital, e trovarne il valore.

7. Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x) = \cos(3x) + 5x^2 \quad$ sia convessa o concava su un intervallo aperto opportunamente piccolo contenente il punto $x = 0$.

8. Verificare che il metodo iterativo di ricerca degli zeri con le tangenti al grafico si applica alla funzione $f : [-2, -1] \to \mathbb{R}$ data da $\quad f(x) = x^2 + \sin(x) - 1 \quad$ e dire da quale estremo esso vada iniziato.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Non si possono usare calcolatrici di alcun tipo. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora e un quarto. Durante tutta la prova si possono consultare solo i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I / **Parte I** — Scritto del 12/6/25 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

(A) (2 punti) Determinare il più grande insieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che f definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ e dire se f sia pari o dispari su D.

(B) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(C) (2 punti) Determinare tutti gli asintoti del grafico di f.

(D) (2 punti) Individuare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi punti di massimo e minimo relativo.

(E) (1 punto) Individuare gli intervalli di concavità e convessità di f e i suoi punti di flesso.

Risposte ai quesiti

1. Non iniettiva, surgettiva

2. -3

3. Non esiste

4. f_2 f_1 f_4 f_3

5. $f'(x) = \frac{\cos(\log(x))}{x}$

6. Si tratta di una forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ e il rapporto delle derivate vale $\frac{e^x}{2x}$, che è ancora una forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ con rapporto delle derivate $\frac{e^x}{2}$, che ha limite $+\infty$, il quale è dunque il valore del limite iniziale ottenuto applicando due volte la regola di de l'Hôpital

7. Convessa

8. $f(-2) = 3 + \sin(-2) \geqslant 2$ è positivo
$f(-1) = \sin(-1) = -\sin(1)$ è negativo poiché $0 < 1 < \pi$ dunque $\sin(1) > 0$
$f'(x) = 2x + \cos(x)$ è negativo su $[-2, -1]$ poiché $2x \leqslant -2$ e $\cos(x) \leqslant 1$, dunque $f'(x) \leqslant -1$
$f''(x) = 2 - \sin(x)$ è positivo
bisogna partire dal primo estremo -2

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (+1, +\infty)$; dispari

(B) $+\infty$ in $(-1)^+$, in $(+1)^+$ e in $+\infty$
$-\infty$ in $-\infty$, in $(-1)^-$ e in $(+1)^-$

(C) Obliquo $y = x$, verticali $x = \pm 1$

(D) Crescente su $(-\infty, -\sqrt{3})$ e su $(+\sqrt{3}, +\infty)$; decrescente su $(-\sqrt{3}, -1)$, su $(-1, +1)$ e su $(+1, +\sqrt{3})$; massimo relativo in $-\sqrt{3}$ e minimo relativo in $+\sqrt{3}$

(E) Concava su $(-\infty, -1)$ e su $[0, +1)$; convessa su $(-1, 0]$ e su $(+1, +\infty)$; flesso in 0