UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 19/2/25 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} -t & -t-1 \\ 4t(t+1) & t^2+4t+4 \end{pmatrix}$.

2. Trovare la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sul piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x + 7y + z = 0$.

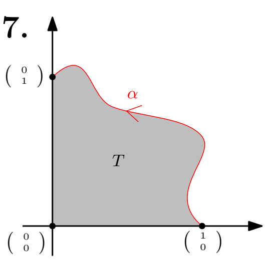
3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[t-4 : 1 : -1]$ e $[1 : t+2 : -5]$ contiene il punto $[1 : -2 : 1]$.

4. Determinare il tipo proiettivo della quadrica
$\{[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : \ x^2 + 3y^2 - 5w^2 + 4xy - 2xw + 4yw + 2zw = 0\}$.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che
$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 3 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-2y} \cdot \cos(3x - y)$ e i segni dei suoi autovalori.

7.



Sia $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva semplice contenuta nel primo quadrante tale che $\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\alpha(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Provare $\int_\alpha x \,\mathrm{d}y$ è l'area della regione T rappresentata in figura.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 19/2/25 — Esercizî

1. Considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 10-10i & -9+13i \\ 5-15i & 20-5i \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Verificare che $\det(M) = -450i$.

(B) (3 punti) Trovare gli autovalori di M.

(C) (3 punti) Provare che esite una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di M.

(D) (3 punti) Esibire una base come al punto precedente.

2. Considerare la curva orientata $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \arctan(t) \\ t^2+4t \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 0$.

(C) (4 punti) Determinare il segno della curvatura di α per ogni t.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 19/2/25 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $t \neq 4$

2. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

3. $t = 5$ e $t = 6$

4. Iperboloide proiettivo

5. $k = \pm 4$

6. $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; discordi

7. Poiché $\mathrm{d}(x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ e l'area di T è $\int\limits_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, essa è anche $\int\limits_{\partial T} x\,\mathrm{d}y$. Ma ∂T consiste di α, di un segmento su cui $x = 0$ e di uno su cui $\mathrm{d}y = 0$, da cui la conclusione

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) Semplici calcoli

(B) $\lambda_1 = -15i,\ \lambda_2 = 30$

(C) $M \cdot M^* = M^* \cdot M$

(D) $v_1 = \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1-7i \\ 5 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -5 \\ 1+7i \end{pmatrix}$

2.

(A) La prima componente di α ha derivata sempre positiva

(B) $\frac{2}{17\sqrt{17}}$

(C) Negativa su $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, nulla agli estremi, positiva fuori

(D) $1 + 2\log(2) - \frac{\pi}{4}$