UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 3/2/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Per una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ si sa che $p_A(1+2i) = p_A(3-i) = p_A(-1+4i) = 0$.
Si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è?

2. Una matrice $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ rappresenta una isometria.
Descrivere l'azione di M sapendo che $\det(M) = 1$ e $\mathrm{tr}(M) = 1 - \sqrt{3}$

3. Vedendo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come l'insieme dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^3$, considerare i luoghi
$\ell = \{[3-t : 4-t : 2t-5] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ e
$\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 6x^3 + y^2z - yz^2 + 17xy - 8yz + 5x - 3 = 0\}$
e trovare l'intersezione di ℓ con l'insieme e l'insieme dei punti all'infinito di $\mathcal{T}$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $5x^2 - 4xy - 2xz - 2yz + 4x - 4y - 2z + 1 = 0$.

5. Per la curva $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\alpha y$.

6. Per la curva orientata $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 6\log(t) \\ 3t - t^2 \end{pmatrix}$ calcolare in ogni punto il segno della curvatura

7. Per la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 1 \\ 2t - t^2 \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\alpha (y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Modulo di "Geometria" — Scritto del 3/2/25 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & t^2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3t-2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Determinare i due valori $t_1 < t_2$ di t per i quali esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M.

(B) (3 punti) Provare che per $t = t_1$ la M ha autovalori positivi.

(C) (4 punti) Per $t = t_2$ determinare i segni degli autovalori di M.

(D) (4 punti) Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare associato ad M per $t = t_1$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 - t - 3 & t+3 \\ t^3 + 2t^2 - 6t - 9 & 6t+9 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(M) = 5t^4 + 16t^3 + 12t^2$.

(B) (4 punti) Provare che l'informazione che M *ha sempre un autovalore del tipo* $\alpha t + \beta$ *con* α *e* β *indipendenti da* t consente di concludere che gli autovalori di M sono $\lambda_1 = 5t + 6$ e $\lambda_2 = t^3 + 2t^2$.

(C) (3 punti) Determinare i valori di t per cui gli autovalori di M non sono distinti.

(D) (3 punti) Determinare i valori di t per cui M non è diagonalizzabile.

Risposte ai quesiti

1. Lo è: ha 3 autovalori distinti

2. Rotazione di angolo $\frac{5}{6}\pi$ intorno a una retta

3. $\{[1 : 2 : -1],\ [0 : 1 : 1]\}$

4. Iperboloide ellittico (a due falde)

5. $\frac{1}{48}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$

6. Positiva su $(1, 3)$, nulla agli estremi, negativa all'esterno

7. $\frac{1}{2}$

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) $t_1 = 1,\ t_2 = 2$

(B) $d_1 = 3 > 0,\ d_2 = 5 > 0,\ d_3 = 13 > 0$

(C) $d_1 = 3 > 0,\ d_2 = 5 > 0,\ d_3 = -23 < 0$ dunque due positivi e uno negativo

(D) $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2.

(A) Sostituendo alla prima colonna sé stessa meno la seconda e poi alla seconda riga sé stessa meno la prima si ottiene $(t^3 + 2t^2)(5t + 6) = 5t^4 + 16t^3 + 12t^2$

(B) Siano $\lambda_1 = \alpha t + \beta$ e λ_2 gli autovalori.
Poiché $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(M) = t^3 + 2t^2 + 5t + 6$ si ha $\lambda_2 = t^3 + 2t^2 + (5 - \alpha)t + (6 - \beta)$.
Ora $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(M) = 5t^4 + 16t^3 + 12t^2$ ed esaminando il coefficiente di t^4 si conclude che $\alpha = 5$.
Esaminando poi il coefficiente di t^3 si trova $\beta = 6$, da cui $\lambda_1 = 5t + 6$ e $\lambda_2 = t^3 + 2t^2$

(C) $t = -3$, $t = -1$, $t = 2$

(D) $t = -1$, $t = 2$