UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 16/1/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare $p_A(t) = t^3 + \ldots$ per $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sapendo quanto segue:
$\det(A) = -11, \qquad \mathrm{tr}(A) = 4, \qquad p_A(-2) = 1.$

2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 2t+4 & t^2-2t-3 \\ t+1 & t^2-t \end{pmatrix}$.

3. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard trovare una base ortogonale
del piano di equazione $3x - 5y + 2z = 0$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori
della matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{5}-t^3 & 2t^2-t \\ 3t+6 & 11 \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy - 6yz + 6x - 2y = 0$.

6. Esibire oppure dimostrare che non esistono due sottospazi proiettivi X e Y di $\mathbb{P}^8(\mathbb{R})$ entrambi di dimensione 5 tali che $X \cap Y$ abbia [redacted] dimensione 1.

7. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial Q} \Big((\,\mathrm{e}^{x^2} - y)\,\mathrm{d}x + (x + \log(2 - y^3))\,\mathrm{d}y \Big)$ dove $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Modulo di "Geometria" — Scritto del 16/1/25 — Esercizî

1. Considerare il sottospazio X di $\mathbb{R}^3$ di equazione $y = 2x + 4z$ e la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su X

(B) (4 punti) Provare che la matrice $M + k \cdot T$ ha sempre l'autovalore 1.
Suggerimento: ***non*** *scriverne il polinomio caratteristico.*

(C) (4 punti) Trovare gli autovalori della matrice $21 \cdot M + 10 \cdot T$ e una base che la diagonalizza.
Suggerimento: usare il punto precedente.

2. Considerare la curva $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \log(s) \\ s^2 - s \\ s^3 - 2s^2 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frenet di α nel punto $s = 1$.

(C) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 1$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[1, 2]$.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $t^3 - 4t^2 - 7t + 11$

2. $t \neq 2$

3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right)$

4. $t = -1$ e $t = 3$

5. Paraboloide ellittico

6. Non esistono: per assurdo X e Y sarebbero le proiezioni di $W \setminus \{0\}$ e $Z \setminus \{0\}$ con $W, Z \subset \mathbb{R}^9$ entrambi di dimensione 6, ma allora $W \cap Z$ avrebbe dimensione almeno $6+6-9 = 3$ e $X \cap Y$, essendo la proiezione di $(W \cap Z) \setminus \{0\}$, avrebbe dimensione almeno 2

7. 2

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 16/1/25 — Esercizî

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) $M = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 17 & 2 & -8 \\ 2 & 20 & 4 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(B) $\mathrm{Ker}(T)$ ha dimensione 2, dunque $X \cap \mathrm{Ker}(T)$ ha dimensione almeno 1, e per $v \in X \cap \mathrm{Ker}(T)$ non nullo si ha $(M + k \cdot T) \cdot v = v$

(C) $\lambda_1 = 21,\ \lambda_2 = 16,\ \lambda_3 = 5;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

2.

(A) La prima componente di α ha derivata strettamente positiva ovunque

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{5}{6\sqrt{3}},\ \tau = \frac{19}{25}$

(D) $\frac{4}{3}$