UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 12/5/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Stabilire per quali $k > 0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} - 7}{x^k + 3}\, dx$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{x + 1}\, dx$.

3. In $\mathbb{R}^3$ esibire tutti i vettori unitari e ortogonali a Span $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

4. Calcolare la dimensione di $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$,
giustificando la risposta.

5. Calcolare l'angolo compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = y + e^x$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 12/5/24 — Esercizio

Al variare di h e k in $\mathbb{R}$ donsiderare il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} hx_1 - x_2 = k \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + hx_2 - 2hx_3 = 0. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Discutere al variare di h e k il numero delle soluzioni del sistema.

(B) (3 punti) Definire W_1 come l'insieme delle soluzioni del sistema per $h = -1$ e $k = 0$. Provare che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ed esibirne una base ortonormale.

(C) (2 punti) Posto $W_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, trovare una base di $W_1 + W_2$.

(D) (1 punto) Calcolare la dimensione $W_1 \cap W_2$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 12/5/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $k > \frac{5}{2}$

2. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2\log(x+1) + c$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. $\dim W = 2$. Se i vettori dati sono $w_1, \dots, w_4$, si ha che w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, mentre $w_3 = -w_1 + 2w_2$ e $w_3 = 3w_1 - w_2$

5. $\frac{3}{4}\pi$

6. $y(x) = (x + c)\,e^x$

Soluzione dell'esercizio

(A) Soluzione unica per $h \neq -1$ e $h \neq -3$, con k qualsiasi. Nessuna soluzione per $h = -1$ e $h = -3$ se $k \neq 0$. Infinite soluzioni per $h = -1$ e $h = -3$ se $k = 0$

(B) Il sistema è omogeneo; $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $W_1 + W_2 = W_2$ e una base è data dai due generatori assegnati di W_2

(D) $W_1 \cap W_2 = W_1$ ha dimensione 1