Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 4/6/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, e se lo fa calcolarne il valore.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x$.

3. Provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ è base del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di equazione $2x-3y+5z=0$ e che $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a W, quindi calcolare le coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$.

4. Esibire la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul piano di equazione $3x-y+2z=0$

5. Trovare in $\mathbb{R}^3$ un vettore di norma 3 e perpendicolare ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = 2y + \mathrm{e}^{3x}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 4/6/24 — Esercizio

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & -k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Determinare i valori di k per cui A è invertibile.

(B) (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A in funzione dal parametro k.

(C) (1 punto) Per $k = 0$ trovare gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche.

(D) (3 punti) Per $k = 0$ determinare una base di ciascun autospazio di A e dire se essa sia diagonalizzabile.

(E) (1 punto) Per $k = -1$ dire se A sia diagonalizzabile.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Converge e vale 2

2. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{5}\log|x+1| + \frac{64}{5}\log|x-4| + c$

3. I vettori di $\mathcal{B}$ appartengono a W, sono linearmente indipendenti e sono nel numero di 2 che è la dimensione di W; il vettore w soddisfa l'equazione che definisce W; $[w]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 13 & 2 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

5. $\pm\sqrt{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $y = \mathrm{e}^{3x} + c\cdot\mathrm{e}^{2x}$

Soluzione dell'esercizio

(A) Nessuno

(B) $P_A(t) = t(t^2 - 4t + k + 4)$

(C) $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2

(D) $V_1 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; non diagonalizzabile

(E) Sì perché ha gli autovalori distinti 0, 1 e 3