UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 18/9/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3+4x^2}{2x+5x^k}\,\mathrm{d}x$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y''+y=x$. (Suggerimento: trovare direttamente una soluzione particolare di forma polinomiale, senza applicare il metodo generale.)

4. Trovare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sul piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $4x+y-2z=0$.

6. Esibire tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 18/9/24 — Esercizio

Considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Esibire le matrici $M \cdot N$ e $N \cdot M$.

(B) (2 punti) Dire se le applicazioni lineari associate ad M e a N siano iniettive e/o surgettive.

(C) (2 punti) Dire se le applicazioni lineari associate ad $M \cdot N$ e a $N \cdot M$ siano iniettive e/o surgettive. (Suggerimento: usare anche il punto precedente.)

(D) (2 punti) Dire se $M \cdot N$ sia diagonalizzabile.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $k > 3$

2. $\frac{7}{2} + \log(2)$

3. $y(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) + x$

4. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $M \cdot N = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$, $N \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 13 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

(B) f_M surgettiva non iniettiva; f_N iniettiva non surgettiva

(C) $f_{M \cdot N}$ bigettiva; $f_{N \cdot M}$ né iniettiva né surgettiva

(D) Lo è perché ha autovalori reali distinti