UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 24/7/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Da un mazzo di 40 carte se ne pescano 5 ed escono 2 bastoni e 3 coppe. Quante possibilità diverse ci sono per le 5 carte pescate?

2. Calcolare modulo e argomento del numero complesso $-\sqrt{3} - i$.

3. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$.

4. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\dfrac{3x^2 + 1}{x^4 + 2}$ ammette massimo o minimo? Spiegare.

5. Assumendo noto che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2x + \cos(x)$ è invertibile, calcolare la derivata in $1 = f(0)$ dell'inversa di f.

6. Determinare l'ordine di infinito in $+\infty$ della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \dfrac{x^5 + \mathrm{e}^{-x}}{x^2 + \mathrm{e}^{-3x}}$.

7. Per la funzione $f : [0, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x \cdot \cos(\pi \cdot x)$ si può concludere che esiste $c \in (0, \frac{3}{2})$ tale che $f'(c) = 0$?

8. Determinare gli intervalli di concavità e di convessità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot x}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 24/7/24 — Esercizio

Considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin(x) - \cos^2(x)$.

(A) (1 punto) Provare che f è periodica di periodo 2π.

(B) (2 punti) Provare che f ammette infiniti zeri.

(C) (2 punti) Trovare tutti i punti in cui si annulla $f'(x)$.

(D) (2 punti) Determinare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di f.

(E) (2 punti) Dire se f sia concava o convessa in $x = 0$.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 24/7/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. 5400

2. Modulo 2, argomento $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

3. -2

4. Ammette massimo: ha limite 0 in $\pm\infty$, dunque esiste $a > 0$ tale che $f(x) < \frac{3}{2} = f(0)$ per $|x| > a$, mentre su $[-a, a]$ è continua, dunque su di esso ha massimo che vale almeno $\frac{3}{2} = f(0)$. Non ha minimo: ha limite 0 in $\pm\infty$ ed è positiva

5. $\frac{1}{2}$

6. 3

7. Sì, per il teorema di Rolle

8. Concava su quelli contenuti in $[-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}]$, convessa su quelli contenuti in $(-\infty, -1-\sqrt{2}]$ e in $[1-\sqrt{2}, +\infty)$

Soluzione dell'esercizio

(A) Lo sono il seno e il coseno

(B) f è continua e $-1 = f(0) < 0 < \sqrt{3} = f(\frac{\pi}{2})$, dunque f ha uno zero in $(0, \frac{\pi}{2})$, e per periodicità ne ha infiniti

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

(D) Massimo relativo in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, minimo relativo in $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e in $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

(E) Convessa