UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 25/6/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $X = \{2, 5, 7, 12\}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ definire $f : X \to Y$ dove $f(x)$ è il resto della divisione $(3x) : 4$. Dire se f sia iniettiva e/o surgettiva.

2. Calcolare $\dfrac{\log_{1/3}(81)}{\log_2(0.125)}$.

3. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 + (-1)^n \cdot n^3}{3n + 5n^3}$.

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(1 + 2\,\mathrm{e}^x)}{\sin(3\,\mathrm{e}^x)}$.

5. Calcolare la derivata dell'espressione $\tan(\log(x))$ dove essa è definita.

6. Dire se si possa applicare la regola di de l'Hôpital a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \cos(x)}{x + \sin(x)}$ e calcolare il suo valore.

7. Determinare gli intervalli di concavità e convessità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^4 + 2x^3 - 36x^2$.

8. Considerare $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(x) - x$. Verificare che a f si applica il metodo iterativo di ricerca degli zeri tramite le tangenti al grafico, e dire da quale estremo si deve partire.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 25/6/24 — Esercizio

Considerare l'espressione $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{x + \ln(x)}$.

(A) (2 punti) Provare che il più grande insieme D su cui essa definisce una funzione è del tipo $(0, a) \cup (a, +\infty)$ con $0 < a < 1$.

(B) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi del suo dominio.

(C) (1 punto) Provare che f ammette una estensione continua $\overline{f} : [0, a) \cup (a, +\infty)$.

(D) (2 punti) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

(E) (2 punti) Trovare i massimi e i minimi relativi di $\overline{f}$.

Risposte ai quesiti

1. Bigettiva

2. $\frac{4}{3}$

3. Non esiste

4. $\frac{2}{3}$

5. $\frac{1+\tan^2(\log(x))}{x}$

6. No perché è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ ma il limite del rapporto delle derivate di numeratore e denominatore non esiste. Il limite comunque vale 1

7. Concava su quelli contenuti in $[-3, 2]$, convessa in quelli contenuti in $(-\infty, -3]$ e $[2, +\infty)$

8. La funzione è discorde agli estremi, decrescente, concava; dal secondo

Soluzione dell'esercizio

(A) Il denominatore $g(x) = x + \ln(x)$ è definito solo per $x > 0$, inoltre

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad g(1) = 1,$$

dunque g si annulla in un solo punto a con $0 < a < 1$

(B) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

(C) Basta porre $\overline{f}(0) = 0$

(D) $x = a$ verticale;
anche se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ non esistono asintoti obliqui perché $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -\infty$

(E) Massimo relativo in $x = 0$, minimo relativo in $x = 1$