UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 4/6/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Provare che $P = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0\}$ non ha minimo.

2. Risolvere $z^2 - (1+3i)z - 2(1-i) = 0$.

3. Calcolare $\lim_{n \to +\infty} n!$

4. Provare che la funzione $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(x) - x$ ha un unico zero.

5. Calcolare l'ordine di 0 in 0 della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(x^3) \cdot \ln(1 + x^2)$.

6. Applicando il teorema di Lagrange a $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 - \cos(\pi \cdot x)$ si trova $c \in (1, 4)$ con $f'(c) = \dots$

7. Calcolare l'approssimazione di Taylor al quinto ordine in $x = 0$ per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x \cdot (1 - \cos(x^2))$.

8. Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n \cdot \frac{\pi}{2})}{n}$ sia convergente e se lo sia assolutamente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 4/6/24 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

(A) (1 punto) Trovare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ tale che f definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Trovare gli zeri di f.

(C) (3 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(D) (2 punti) Determinare tutti gli asintoti del grafico di f.

(E) (3 punti) Trovare i punti di massimo e minimo relativo di f.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Se per assurdo $x \in P$ fosse il minimo di P si avrebbe anche $\frac{x}{2} \in P$, ma $\frac{x}{2} < x$, contro la definizione di minimo

2. $z_1 = 2i,\ z_2 = 1 + i$

3. $+\infty$

4. f è continua, $f(0) = 1 > 0 > -\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2})$ e $f'(x) = \sin(x) - 1 < 0$ su $[0, \frac{\pi}{2})$

5. 5

6. $\frac{13}{3}$

7. $\frac{1}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$

8. Coincide con $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ dunque converge ma non assolutamente

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

(B) Nessuno

(C) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(D) Verticale $x = -1$, obliquo $y = x$

(E) Massimo relativo in $x = -2$, minimo relativo in $x = 0$,