ISTITUZIONI DI MATEMATICA I, 22/05

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

[TESTI D'ESAME – Prova 2 – ES. 6] $y'(x) = -\frac{y^2}{x}$

Eq. a variabili separabili (anche di tipo Bernoulli)

Soluzioni costanti tali che $g(y) = y^2 = 0$: $y \equiv 0$

Soluzioni tc $g(y) \neq 0$: $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx$

- $\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + C$
- $\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\ln|x| + c}$, con $c \in \mathbb{R}$

Cambio di variabile $z = y(x) \Rightarrow dz = y'(x)dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\overbrace{y'(x)\,dx}^{dz}}{\underbrace{y^2(x)}_{z^2}} = \int \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{y(x)}$$

Nel cambio di variabile negli int. indefiniti dobbiamo tornare alla variabile di partenza.

Conclusione: le soluzioni sono $y \equiv 0$, $y = \frac{1}{\ln|x| + C}$ con $C \in \mathbb{R}$

[TESTI D'ESAME – Prova 3 – ES. 6] $\quad y'(x) = y + e^x$

$\rightsquigarrow$ della forma $y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = 1$, $b(x) = e^x$

Formula: $y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx$ con $A' = a$.

Scegliamo (una primitiva di 1) $A(x) = x$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)} = e^x \int e^{-x} e^x \,dx = e^x \int 1 \,dx = \boxed{e^x (x + c)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Consiglio: verificare che le y trovate soddisfino l'equa. diff.

[SCHEDA 13 – 9 a] $\quad y''(x) - y'(x) - y(x) = \underbrace{x^2 + 5x + 1}_{f(x)}$

$f(x)$ polinomio

Equa. diff. lineare a coef. costanti, ordine 2, non omogenea.

La soluzione generale è della forma $y(x) = y_p(x) + y_H(x)$

y_p: una sol. particolare

y_H: sol. generale di $y'' - y' - y = 0$ (eq. omogenea associata)

SOL. GENERALE DELL'EQ. OMOG. ASSOCIATA:

$y'' - y' - y = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ eq. caratteristica $\rightsquigarrow$ radici $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \; y_H(x) = C_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$, con C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$.

UNA SOLUZIONE PARTICOLARE:

$f(x)$ polinomiale $\Rightarrow$ cerchiamo y_p polinomiale

Ragionevolmente y_p sarà di grado 2 (per esclusione: se il grado fosse ≤ 1, con $y'' - y' - y$ trovo ancora un polinomio di grado ≤ 1 che non può essere pari a $f(x)$ di grado 2. Analogamente escludiamo un grado ≥ 3).

$\Rightarrow y_p$ della forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c incogniti.

imponiamo che $y_p'' - y_p' - y_p = f(x)$

$\Rightarrow \quad 2a - (2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 5x + 1$

$\Rightarrow \quad -a\, x^2 - (2a + b)\, x + (2a - b - c) = x^2 + 5x + 1$

$\Rightarrow \; a = -1, \; b = -3, \; c = 0$

$\Rightarrow \; y_p(x) = -x^2 - 3x$ è una soluzione particolare.

CONCLUSIONE

$$y(x) = -x^2 - 3x + C_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}, \text{ con } C_1 \text{ e } C_2 \text{ in } \mathbb{R}$$

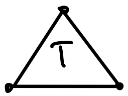
4 - 22/05

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI DOPPI

[TESTI D'ESAME - Prova 1 - ES. 1]

$$\int_T x^2 y \, dx\, dy = ?$$

T triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$



$T = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-|x|\}$ oppure $T = \{-1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1+x\} \cup \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$

$$\int_T x^2 y \, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{1-|x|} x^2 y \, dy \right] dx = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\underbrace{\int_0^{1-|x|} y \, dy}_{\int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c} \right] dx = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-|x|} dx$$

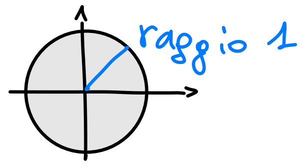
non dip. da y

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \left(1 - |x|\right)^2 dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1}}_{\text{intervallo simmetrico}} \underbrace{x^2 \left(1 + x^2 - 2|x|\right)}_{\text{pari}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 x^2 \left(1 + x^2 - 2x\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + x^4 - 2x^3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{30}}.$$

5 - 22/05

[PROVA 2] $\displaystyle\int_C x^2\,dx\,dy = ?$ con $C = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$



Cambio di variabile con le coordinate polari $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\int_C x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\right)d\theta$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)}_{\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)}_{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

COMMENTI

1) Richiamo sulla formula del cambio di variabile

$C \subset \mathbb{R}^2$, $C = \Phi(R)$, $R \subset \mathbb{R}^2$

$(x,y) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))$

Formula: $\displaystyle\int_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_R f(\Phi(u,v))\,\underbrace{|\det J_\Phi(u,v)|}_{\text{modulo del determinante della matrice Jacobiana di } \Phi}\,du\,dv$

6 _ 22/05

Nel caso delle coord. polari: usiamo (r,θ) come variabili

$$(x,y)=\Phi(r,\theta)=(\underbrace{r\cos\theta}_{\Phi_1},\underbrace{r\sin\theta}_{\Phi_2})$$

Matrice Jacobiana di Φ:

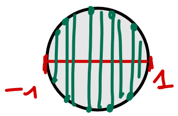
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

determinante $= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \Rightarrow |\text{determinante}| = r.$

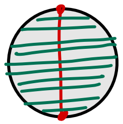
Quindi possiamo dare per buono (per le coord. polari) che $dx\,dy \to r\,dr\,d\theta$

$$\Rightarrow \int_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

2) Modo alternativo di risolvere l'esercizio (che non porta al risultato)



$$C=\left\{-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$$



$$=\left\{-1\le y\le 1,\ -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2}\right\}$$

la circonf. ha equazione $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ o $x=\pm\sqrt{1-y^2}$

7_22/05

$$\int_C x^2 dx dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \int_{-\sqrt{\cdots}}^{\sqrt{\cdots}} 1\, dy \quad dx = \int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

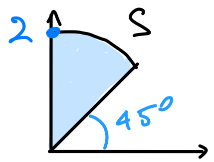
⇝ non lo so risolvere facilmente

oppure

$$\int_C x^2 dx dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2 \; dx\right) dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2}\, dy$$

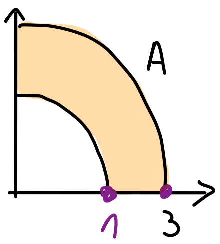
⇝ non lo so risolvere facilmente

VARIANTI



$S = \{ x^2+y^2 \le 4 ,\; y \ge x,\; x \ge 0\} \rightsquigarrow \{0 \le r \le 2,\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

$$\int_S x^2\, dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 r^2\cos^2\theta \; r dr d\theta = \left(\int_0^2 r^3 dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta\right) = \cdots$$



$A = \{ 1 \le x^2+y^2 \le 9 ,\; x \ge 0,\; y \ge 0\} \rightsquigarrow \{1 \le r \le 3,\; 0 \le \theta \le \pi/2\}$

$$\int_A x^2\, dx dy = \int_0^{\pi/2}\int_1^3 (r^2\cos^2\theta)\, r\, dr d\theta = \left(\int_1^3 r^3 dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta\right) = \cdots$$

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI DI FUNZIONI DI 1 VARIABILE

PROVA 1 - ES. 3

$$\int \ln x \, dx = \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln x} \, dx = fg - \int fg' = x \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \underset{f'}{x} \, \underset{g}{\ln x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x) \ln x \, dx = \left[x \ln x - x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_{x=1}^{x=2}$$

$$= 2 \ln 2 - 2 + 2 \ln 2 - 1 - \left(0 - 1 + 0 - \frac{1}{4}\right) = 4 \ln 2 - 3 + \frac{5}{4} = 4 \ln 2 - \frac{7}{4}$$

PROVA 2 - ES. 1

$$\int \ln(1+x^2) \, dx = \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln(1+x^2)} \, dx = fg - \int fg' = x \ln(1+x^2) - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot 2x \, dx$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$$

$$\Rightarrow \int \ln(1+x^2) \, dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan(x) + C$$

9_22/05

PROVA 3, ES. 1 $\quad k>0, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}-7}{x^k+3}\,dx$ converge?

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}-7}{x^k+3}$ continua da $[0,+\infty)$ in $\mathbb{R}$

L'integrabilità dipende da se e come $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x^{3/2}}{x^k} = \dfrac{1}{x^{k-3/2}}$

converg. di $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ è da sapere

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{k-3/2}}\,dx \text{ converge} \iff k-\frac{3}{2}>1 \iff \boxed{k>\frac{5}{2}}.$$

o qualsiasi $M>0$ $\qquad$ o qualsiasi $M>0$

PROVA 3 - ES. 2

$$\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx = \int\left(P(x) + \frac{\text{costante}}{1+x}\right)dx =$$

divisione tra polinomi

$x^3-1 = (x^2-x+1)(x+1)-2$

$$= \int\left(x^2-x+1-\frac{2}{1+x}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|1+x|+C$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln\left((1+x)^2\right)+C}$$