ISTITUZIONI DI MATEMATICA I, 15/05

Esercizi scheda 11 + Introduzione alle Equazioni Differenziali

7a $W \subset \mathbb{R}^2$

Forma cartesiana $W: 6x - 5y = 0$ o, equivalentemente, $W = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}^{\perp}$

Forma parametrica: poiché W ha dimensione 1, mi basta trovare un vettore che vi appartiene e considerare lo spazio da esso generato

$6 \cdot 5 - 5 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow$ $W = \text{span}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

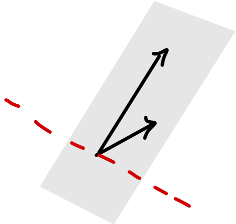
o, equivalentemente, $W: \begin{cases} x = 5t \\ y = 6t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

7c $W \subset \mathbb{R}^3$ Forma cartesiana

$W: \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ o, equivalentemente $W = \left(\text{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)^{\perp}$

Forma parametrica: W ha dimensione 1, quindi mi basta trovare un vettore che vi appartiene e considerare lo spazio da esso generato.

2-15/05



Un esempio: $\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\25\\10\end{pmatrix}$ è $\perp$ ad entrambi $\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\boxed{W = \operatorname{span}\begin{pmatrix}-5\\25\\10\end{pmatrix}}$ o, equivalentemente, $\boxed{W: \begin{cases} x = -5t \\ y = 25t \\ z = 10t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$

7f $W \subset \mathbb{R}^3$ Forma parametrica $W: \begin{cases} x = -2t \\ y = 7t \\ z = 5t \end{cases}$ cioè $W = \operatorname{span}\begin{pmatrix}-2\\7\\5\end{pmatrix}$

Forma cartesiana: "eliminiamo" il parametro t.

1^a equazione $\Rightarrow$ $t = -\frac{x}{2}$

$2^a, 3^a$ equazione $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = 7\left(-\frac{x}{2}\right) \\ z = 5\left(-\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}}$

o equivalentemente $\boxed{W = \left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\right)\right)^{\perp}}$

3 - 15/05

7g $W \subset \mathbb{R}^3$ Forma cartesiana: $W: 8x + 90y - 35z = 0$ cioè $W = \begin{pmatrix} 8 \\ 90 \\ -35 \end{pmatrix}^{\perp}$.

Forma parametrica: poiché $\dim(W) = 2$ dobbiamo trovare due generatori.
Possiamo facilmente trovare elementi di W della forma $\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ prendiamo $\begin{pmatrix} -90 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$: sono elementi di W e sono lin. indip.

$\Rightarrow W = \text{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} -90 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}_{w_2} \Big)$ o equivalentemente $W: \begin{cases} x = -90t + 35s \\ y = 8t \\ z = 8s \end{cases}$

con $t, s \in \mathbb{R}$ $\qquad w = t w_1 + s w_2$

7k $W \subset \mathbb{R}^3$ Forma cartesiana: $W: \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \\ 7x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$ cioè $W = V^{\perp}$,

con $V = \text{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_3} \Big)$

$\dim W = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(V) = 3 - \dim V$.
$\dim V = 2$ o 3, a seconda che i v_i siano tutti indipendenti o meno.

4-15/05

Un modo è guardare il determinante $\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

Se è $=0 \Rightarrow$ le colonne sono lin. dipendenti,

se è $\neq 0 \Rightarrow$ le colonne sono lin. indip.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 4 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{osservazione: } v_3 = 2v_1 + v_2) \Rightarrow \dim V = 2 \Rightarrow \dim W = 1.$$

$V = \text{span}(v_1, v_2) \Rightarrow$ Forma parametrica: $W = \text{span}(v_1 \times v_2) = \boxed{\text{span}\begin{pmatrix} 7 \\ -22 \\ -13 \end{pmatrix}}$

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -22 \\ -13 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente $\boxed{W: \begin{cases} x = 7t \\ y = -22t \\ z = -13t \end{cases}}$ con $t \in \mathbb{R}$.

79 $\quad W \subset \mathbb{R}^4 \quad$ Forma cartesiana: $W: \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 8w = 0 \\ -x + 6y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$

cioè $W = V^\perp$ con $V = \text{span}(v_1, v_2)$, $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\dim V = 2 \Rightarrow \dim W = 4 - 2 = 2$.

$\Rightarrow$ ci serviranno due generatori per scrivere W come span o 2 parametri per la forma parametrica.

Forma parametrica:

$$\begin{cases} x = 6y + 4z + 3w \\ 3(6y + 4z + 3w) - 2y + 5z - 8w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \_\_\_ \\ 16y + 17z + w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = -16y - 17z \\ x = 6y + 4z - 48y - 51z = -42y - 47z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -42s - 47t \\ y = s \\ z = t \\ w = -16s - 17t \end{cases}$$

con $s, t \in \mathbb{R}$. o, equiv.,

$$W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -42 \\ 1 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -47 \\ 0 \\ 1 \\ -17 \end{pmatrix} \right)$$

7W $W \subset \mathbb{R}^4$ Forma parametrica

$$W: \begin{cases} x = -3t + 5s \\ \boxed{y = 7t + s} \\ z = -t + 4s \\ w = 2t - 3s \end{cases}$$

Forma cartesiana: "eliminiamo" s e t.

2^a equazione $\Rightarrow$ $\boxed{s = y - 7t}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = -3t + 5y - 35t = -38t + 5y \\ z = -t + 4y - 28t = -29t + 4y \\ \boxed{w = 2t - 3y + 21t = 23t - 3y} \end{cases}$

3^a equazione $\Rightarrow$ $\boxed{t = \dfrac{(w + 3y)}{23}}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = -\dfrac{38}{23}(w + 3y) + 5y \\ z = -\dfrac{29}{23}(w + 3y) + 4y \end{cases}$

$$\begin{cases} 23x = -38w + (\overbrace{-38 \cdot 3 + 5 \cdot 23}^{1})y \\ 23z = -29w + (\underbrace{-29 \cdot 3 + 4 \cdot 23}_{5})y \end{cases}$$

$$W: \begin{cases} 23x - y + 38w = 0 \\ 5y - 23z - 29w = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente, $W = \left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 23 \\ -1 \\ 0 \\ 38 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -23 \\ -29 \end{pmatrix}\right)\right)^{\perp}$

7 _ 15/05

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Introduzione: Sono equazioni che coinvolgono una funzione incognita y e le sue derivate $(y', y'', \dots, y^{(n)}, \dots)$ $\longrightarrow$ Obiettivo: determinare y

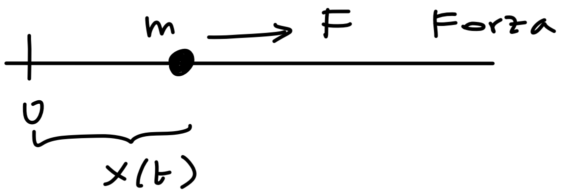
$y^{(n)}$: derivata n-esima

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots \frac{d}{dx}\right.\right.}_{n \text{ derivate}} y(x)\Big)\Big)$$

Esempi:

* Corpo di massa m che si muove lungo una retta sotto l'azione di una forza F

$$m\, x''(t) = F \longrightarrow x(t) = ?$$



* F forza elastica

$$m\, x''(t) = -k\, x(t) \longrightarrow x(t) = ?$$

Definizioni:

EDO equazioni differenziali ordinarie $\rightarrow$ l'incognita è una funzione di 1 variabile

noi vedremo solo queste

8 - 15/05

EDP equazioni differenziali alle derivate parziali $\rightarrow$ l'incognita è una funzione di più variabili e le derivate nell'equazione sono derivate parziali

ORDINE ordine massimo della derivata che compare nell'equazione

EDO LINEARE della forma

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

EDO OMOGENEA se <u>tutti</u> i termini coinvolgono y o le sue derivate.

Esempi:

- $y'(x) + 7 = 0$ di ordine 1, lineare, non omogenea
- $y''(x) - \sin x \cdot y'''(x) + \cos x = 7$ di ordine 3, lineare, non omogenea
- $x^2 y''(x) + x^3 y'(x) + 3y(x) + x^7 = 0$ di ordine 2, lineare, non omogenea
- $x\,[y''(x)]^2 + 3y(x) = 0$ di ordine 2, non lineare, omogenea.

9_15/05

4 TIPI DI EQUAZIONI DIFF. ORDINARIE DI ORDINE 1 E 2.

(continuiamo domani)

$\boxed{1}$ EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE 1

$$\boxed{y'(x) = a(x)y(x) + b(x)}$$

con a e b funzioni continue assegnate.

Esempi (prima di vedere la formula risolutiva)

Caso $a \equiv 0$

ES. $y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = c_1$ con $c_1 \in \mathbb{R}$

ES. $y'(x) = x \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

ES. $y'(x) = \cos x \Rightarrow y(x) = \sin x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Morale: se $a(x) = 0$, $y'(x) = b(x) \Rightarrow y(x) = \int y' \, dx = \int b \, dx$

e troviamo infinite soluzioni.

1a 15/05

Caso $b \equiv 0$

Es. $y'(x) = y(x) \Rightarrow y(x) = C e^{x}$, con $C \in \mathbb{R}$

Es. $y'(x) = 2y(x) \Rightarrow y(x) = C e^{2x}$, con $C \in \mathbb{R}$.

Es. $y'(x) = \cos x \cdot y(x) \Rightarrow y(x) = C e^{\sin x}$, con $C \in \mathbb{R}$.

Morale: se $b \equiv 0$, $y'(x) = a(x)\, y(x) \Rightarrow y(x) = C e^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. $A' = a$.

anche qui ci sono infinite soluzioni.

Caso generale

FORMULA: $y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx$

Osservazioni:

- Se $b \equiv 0 \Rightarrow \int 0 = C \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = C e^{A(x)}$
- Se $a \equiv 0 \Rightarrow A(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \underbrace{e^{A} \int e^{-A}}_{1} b(x)\, dx = \int b(x) dx$

ritroviamo le formule di prima

11_15/05

ES. $y'(x) = \dfrac{xy(x)+1}{x^2}$, per $x>0$

$$y'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y(x) + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{b(x)}$$

$A(x) = \ln x$ (mi basta UNA primitiva)

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{-\ln x} \frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}}, \quad e^{\ln x} = x$$

Formula

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{\ln x}\left(-\frac{1}{2x^2} + C\right) = -\frac{1}{2x} + Cx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = -\frac{1}{2x} + Cx, \text{ con } C \in \mathbb{R}}$$