# Ist. Mat. I - CIA
9/5/24

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = \det(t \cdot I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-4 & -5 \\ 0 & t+7 \end{pmatrix}$

$= (t-4)(t+7)$ $\quad \lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -7$

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+3 & 0 \\ -1 & t-7 \end{pmatrix} = (t+3)(t-7)$

$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 7$

$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = -8$, $\lambda_1 \lambda_2 = 11$

$\left( p_A(t) = t^2 - tr(A) \cdot t + \det(A) \right)$

$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+5 & -2 \\ -2 & t+3 \end{pmatrix}$

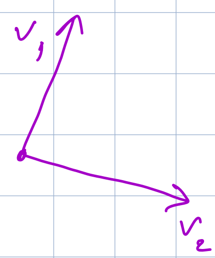
$= (t+5)(t+3) - 4$

$= t^2 + 8t + 11$

$\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-11} = -4 \pm \sqrt{5}$

**Oss**: $A$ è simmetrica dunque ammette una base ortonormale di autovettori.

Però: ho due autoval. distinti $\Rightarrow$ due autovett. lin. indip.




Gli autovett. rel. a $\lambda_1$ sono esattamente i multipli di $v_1$

" " " $\lambda_2$ " " " " $v_2$

$\Longrightarrow \quad v_1 \perp v_2$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-4+\sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -5x + 2y = (-4+\sqrt{5})x \\ 2x - 3y = (-4+\sqrt{5})y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1+\sqrt{5})x + 2y = 0 & ✓ \\ 2x + (1-\sqrt{5})y = 0 & ✓ \end{cases}$$

$$x = 2 \qquad y = 1+\sqrt{5}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -5x + 2y = (-4-\sqrt{5})x \\ 2x - 3y = (-4-\sqrt{5})y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{5})x + 2y = 0 & \checkmark \\ 2x + (1+\sqrt{5})y = 0 & \checkmark \end{cases}$$

$$x = 2 \qquad y = 1-\sqrt{5}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo $\quad v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} = 4 + (1-5) = 0$

<u>ok</u>

(e) $\quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 11 \qquad \lambda_1 = 7$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 28 \qquad \lambda_2 = 4$$

Essendo distinti so che $A$ è diagonalizzabile:

$v_1 : \begin{cases} 6x + 2y = 7x \\ x + 5y = 7y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 : \begin{cases} 6x + 2y = 4x \\ x + 5y = 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 14 \end{matrix}$

$$p_A(t) = t^2 - 7t + 14$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-56}}{2} \quad \text{non reali}$$

$\Longrightarrow$ A non è diago.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$tr(A) = 3$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$\cancel{p_A(t) =} \det\begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 \\ -3 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -3 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (t-1)^3 + 2(t-1) - 6(t-1) \\ &= (t-1)(t^2 - 2t + 1 - 4) \\ &= (t-1)(t^2 - 2t - 3) \\ &= (t-1)(t-3)(t+1) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = -1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x + 2y - z = x \\ 3x \cancel{+y} = \cancel{y} \\ 2x \cancel{+z} = \cancel{z} \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3x \\ 3x + y = 3y \\ 2x + z = 3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -3 & 3 \\ 0 & t+1 & -3 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-2)(t^2-1) - 18 + 6(t+1)$$

$$= t^3 - 2t^2 - t + 2 + 6t + 6 - 18$$

$$= t^3 - 2t^2 + 5t - 10$$

$$= t^2(t-2) + 5(t-2)$$

$$= (t-2)(t^2+5)$$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3}$ non reali

$\Longrightarrow$ non diagonalizzabile.

**Ricordo:** Se $p_A(t) = t^n + a_1 \cdot t^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_1, \dots, a_n$ interi allora se esiste una soluzione intera è un divisore di $a_n$.

**Es:** $t^3 - 2t^2 + 5t - 10$

Possibili soluz. intere: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.

| | | |
|---|---|---|
| $+1$ | $1-2+5-10 \neq 0$ | No |
| $-1$ | $-1-2-5-10 \neq 0$ | No |
| $2$ | $8-8+10-10 = 0$ | Sì |

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -2 & 5 & -10 \\
2 & & 2 & 0 & 10 \\
\hline
 & 1 & 0 & 5 & \checkmark
\end{array}
$$

$t^2 + 5$

(i) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

$f : V \to V$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Perché $f$ va bene? $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ho $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata ad $M$ cioè $g(x) = M \cdot x$.

$V \subset \mathbb{R}^3$ : si verifica che $g(V) \subset V$ questa definita $f: V \to V$ lineare.

Lo faccio: prendo $x$ che verifica l'equazione, cioè

$$4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$$

e controllo che anche $y = g(x)$ la soddisfi:

$$4y_1 - 3y_2 - 5y_3 \overset{?}{=} 0$$

$$4(x_2+x_3) - 3(x_1+x_2-2x_3) - 5(x_1-x_2) \overset{?}{=} 0$$

$$-8x_1 + 6x_2 + 10x_3 \overset{?}{=} 0$$

$$-2\underbrace{(4x_1 - 3x_2 - 5x_3)}_{0} \overset{?}{=} 0$$

$\underline{\underline{\text{SI}}}$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0\}$$

$f: V \to V$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Scrivo $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e allora gli autoval. di $f$ sono quelli di $A$.

Scelgo: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 3$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{32}{4^2} = 2$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

(Volendo trovare gli autovettori relativi trovo $v_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ autovett. di $A$ rel. a $\lambda_j$

e quello per $f$ è $\quad x_j \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + y_j \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$f \xrightarrow{\mathcal{B}} A \rightsquigarrow \lambda_1, \lambda_2$ per $A \rightsquigarrow v_1, v_2$ per $A \xrightarrow{\mathcal{B}} w_1, w_2$ per $f$

3. discutere diagonalizzabilità

a) $\begin{pmatrix} -32 & -25 \\ 49 & 38 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 6$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -32 \cdot 38 + 49 \cdot 25 = 9$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

Unico autoval. $\lambda_1 = 3$ con $\boxed{m.a.(3) = 2}$.

$m.g.(3) = \dim(\mathrm{Ker}(3 \cdot I_2 - A))$

$= \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3+32 & 25 \\ -49 & 3-38 \end{pmatrix}\right)$

$= \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 35 & 25 \\ -49 & -35 \end{pmatrix}\right)$

(deve essere almeno 1 poiché 3 è autovalore)

Infatti $\det\begin{pmatrix} 35 & 25 \\ -49 & -35 \end{pmatrix} = -35^2 + 49 \cdot 25$

$= -(7 \cdot 5)^2 + 7^2 \cdot 5^2 = 0$

$\begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -49 & -35 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \neq 2$

$\Rightarrow \boxed{m.g.(3) = 1}$

$\Rightarrow$ non diagonalizzabile

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$

$= t(t-2)^2 + (t-2) - (t-2) = t(t-2)^2$

$\lambda_1 = 0 \qquad \boxed{m.a.(0) = 1}$

$\lambda_2 = 2 \qquad \boxed{m.a.(2) = 2}$

Sempre: $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$

$\forall \lambda$ autovalore

$\Rightarrow \boxed{m.g.(0) = 1}$

$m.g.(2) = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

deve essere almeno 1 cioè $\det(\uparrow) = 0$ : vero

<u>Oss</u>: $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - \mathrm{rank}(M)$;

inoltre

$\mathrm{rank}(M) = \dim(\mathrm{Span}(\text{colonne di } M))$

= più grande intero $k$ t.c. dentro $M$ ho sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$.

Per noi : $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$\Longrightarrow \boxed{m.g.(2)} = 3 - \mathrm{rank}(\uparrow) = 3 - 2 = \boxed{1}$

$\Longrightarrow$ non diagonalizzabile

(k) $\begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = k - 1$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2k^2 + k + 2k^2 - 4k - 2 + k = -2k - 2 = (-2)\cdot(k+1)$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = k+1$

Oppure: $p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-2k+1 & -2+k \\ -2k-1 & t+k \end{pmatrix}$

$$= \dots = t^2-(k-1)t-2(k+1)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(k-1)\pm\sqrt{k^2-2k+1+8k+8}}{2} = \frac{k-1\pm\sqrt{k^2+6k+9}}{2}$$

$$= \frac{(k-1)\pm(k+3)}{2} \begin{cases} k+1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = k+1$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ è diago: lo è se $-2 \neq k+1$, cioè $k \neq -3$.

Per $k=-3$ ho autoval. $-2$ con $m.a.(-2)=2$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$m.g.(-2) = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ Per $k=-3$ non è diagonalizzabile.

(p) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & 3k & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & t-1 & -3k \\ -1 & 0 & -3k & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-1)(t-2)(t^2-2t+1-9k^2)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 + \lambda_4 = 2$

$\lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1-9k^2 = (1-3k)(1+3k)$

$\Rightarrow \lambda_3 = 1-3k \quad \lambda_4 = 1+3k$

Se sono tutti distinti A è diagonalizzabile.
Non lo sono se:

$\lambda_1 = \lambda_2$ mai
$\lambda_1 = \lambda_3$ per $k=0$
$\lambda_1 = \lambda_4$ per $k=0$
$\lambda_2 = \lambda_3$ per $k=-1/3$
$\lambda_2 = \lambda_4$ per $k=+1/3$
$\lambda_3 = \lambda_4$ per $k=0$

Dunque: $k \neq 0, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}$ diago

$k=0$ $\boxed{m.a.(1)=3}$ $m.a.(2)=1$
$(\Rightarrow m.g.(2)=1)$

$k = -\frac{1}{3}$ $\quad m.a.(1) = 1$ $(\Rightarrow m.g.(1) = 1)$ $\quad \boxed{m.a.(2) = 2}$ $\quad m.a.(0) = 1$ $(\Rightarrow m.g.(0) = 1)$

$k = \frac{1}{3}$ $\quad m.a.(1) = 1$ $(\Rightarrow \ldots)$ $\quad \boxed{m.a.(2) = 2}$ $\quad m.a.(0) = 1$ $(\Rightarrow \ldots)$

$k = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{m.g.(1)} = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - 2 = \boxed{2}$$

Non diago.

$$k = \pm 1/3 \quad \boxed{m.g.(2)} = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 1 & 0 & \pm 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \pm 1 \\ -1 & 0 & \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \operatorname{rank}(\uparrow) = 4 - 3 = \boxed{1}$$

Non diagonalizzabile