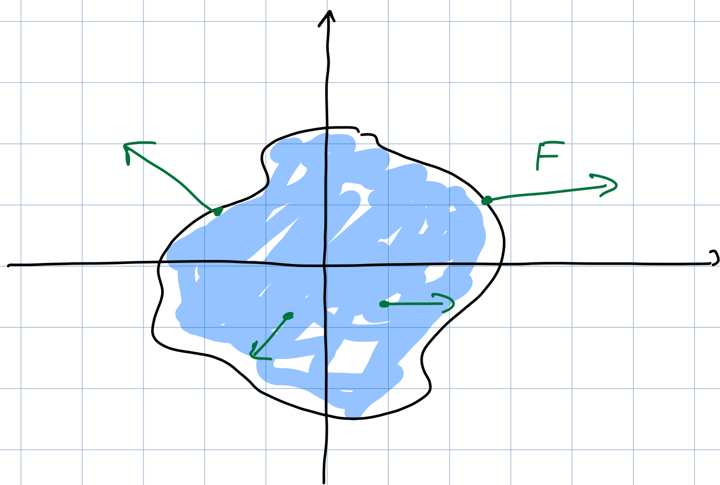
Ist. Mat. 2 - CIA
2/5/24

Diagonalizzazione

C corpo materiale piano rigido soggetto a forze ma in equilibrio: risultante tutte le forze nel baricentro è nulla.



$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ approx. lin.

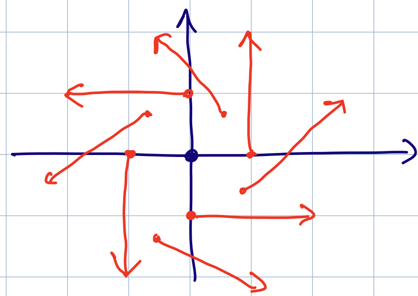
$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cong M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Oss: $M = \underset{\text{simm.}}{S} + \underset{\text{antisimm.}}{A}$

$$\tfrac{1}{2}(M + {}^tM) \qquad \tfrac{1}{2}(M - {}^tM)$$

Es: $\underset{M}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}} = \underset{S}{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}} + \underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$

Effetto A :



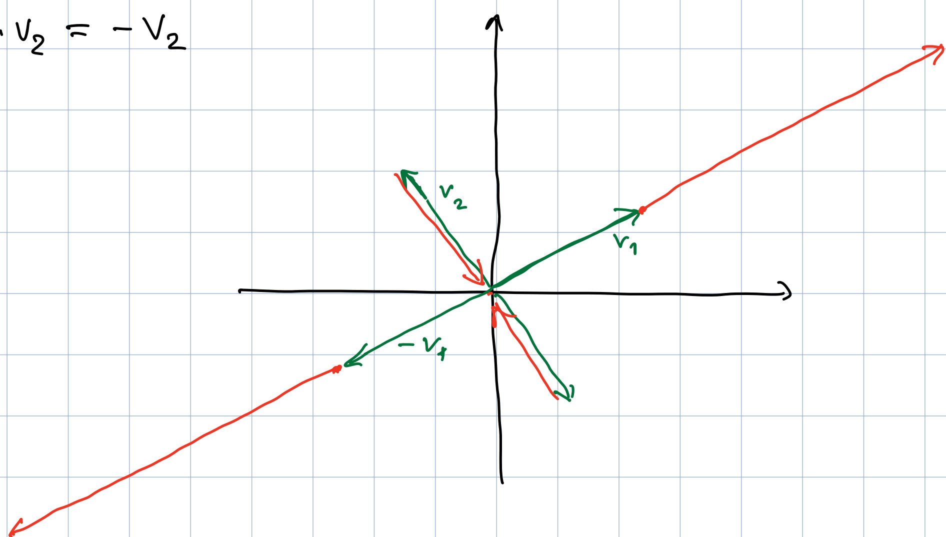
movimento rigido (rotazione)

Effetto S : $S = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Fatto : $v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$S \cdot v_1 = 2 v_1$ $\qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$S \cdot v_2 = -v_2$



Scoperta : azione di S ben compresa se trovo base (v_1, v_2) t.c.

$S \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1 \qquad S \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2 \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

cioè $\quad S \cdot \underbrace{(v_1, v_2)}_{\substack{X \\ \cap \\ M_{2\times 2}(\mathbb{R})}} = \underbrace{(v_1, v_2)}_{X} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

cioè $\quad X^{-1} \cdot S \cdot X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$

Def: $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se esiste $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile t.c.

$$\boxed{X^{-1} \cdot M \cdot X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

Problema: capire date M come trovare tali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e X (se esistono).

Oss: in generale se ho $f: V \to V$ problema: cercare base $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Se prendo $\mathcal{E}$ a caso e pongo $M = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ un'altra matrice rispetto a altra base $\mathcal{B}$ è

$X^{-1} \cdot M \cdot X \quad$ dove X è la matrice $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$.

Problema: data $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cerco una base $(v_1, \dots, v_n)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c. $M \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$.

Def: diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di M se $\exists\, v \neq 0$ t.c. $M \cdot v = \lambda \cdot v$; ogni tale v è detto autovettore relativo a λ.

Prop: detto $p_M(t) = \det(t \cdot I_n - M)$ (polinomio caratteristico di M) si ha che $p_M(t)$ è un polinomio monico di grado n e

(inizia con t^n)

λ autoval $\Leftrightarrow$ λ è radice di $p_M(t)$.

Dimo: polinomio monico

$n = 2$; $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $p_M(t) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

$$= \det\begin{pmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{pmatrix}$$
$$= (t-a)(t-d) - bc$$
$$= t^2 - (a+d)t + ad - bc.$$

λ autoval $\Leftrightarrow$ $\exists\, v \neq 0$ t.c. $M \cdot v = \lambda \cdot v$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - M \cdot v = 0$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot I_n \cdot v - M \cdot v = 0$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, v \neq 0$ t.c. $(\lambda \cdot I_n - M) \cdot v = 0$

$\iff \lambda \cdot I_n - M$ non invertibile

$\iff \det(\lambda \cdot I_n - M) = 0$

$\iff p_M(\lambda) = 0$ cioè λ è radice di $p_M(t)$. $\blacksquare$

Es: $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$p_M(t) = \det(t \cdot I_2 - M) = \det\begin{pmatrix} t-3 & -6 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$= (t-3)(t+2) - 6 = t^2 - t - 12$$

$$= (t-4)\cdot(t+3)$$

Dunque gli autovalori di M sono
$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -3$.

Essendo essi autovalori
so che esistono $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ t.c.
$M \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$, $M \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$.

Li cerco:

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; devo avere $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6y_1 = 4x_1 \\ x_1 - 2y_1 = 4y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 6y_1 = 0 \\ \cancel{x_1 - 6y_1 = 0} \end{cases}$$

Posso scegliere $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$; voglio $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x_2 + 6y_2 = -3x_2 \\ x_2 - 2y_2 = -3y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{6x_2 + 6y_2 = 0} \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$$

Posso scegliere $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusione $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile anzi se

$X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ho

$$X^{-1} \cdot M \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad p_M(t) = t^2 - \underbrace{(a+d)}_{tr(M)} \cdot t + \underbrace{(ad - bc)}_{det(M)}$

Fatto : $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ allora

$$p_M(t) = t^n - tr(M) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot det(M).$$

$$S = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$tr(S) = 1 \qquad \det(S) = \frac{1}{4^2}\cdot(-5-27) = -2$$

$$p_S(t) = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$$

$$\lambda_1 = 2 \rightsquigarrow v_1 \qquad \lambda_2 = -1 \rightsquigarrow v_2$$

Oss: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $p_M(t) = t^2 - tr(M)\cdot t + \det(A)$

se ha autoval λ_1, λ_2 ho

$$p_M(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$$

$$t^2 - tr(M)\cdot t + \det(M) = t^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\cdot t + \lambda_1\cdot\lambda_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = tr(M) \\ \lambda_1\cdot\lambda_2 = \det(M) \end{cases}$$

———— o ————

Fatto: se le radici di $p_M(t)$ sono $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (eventualmente ripetute) allora

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = tr(M)$$

$$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m = \det(M)$$

Es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Cerchiamo gli autoval cioè le radici di

$$p_M(t) = t^2 - 3 \cdot t + 14$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 56}}{2}$$ non sono reali

$\Longrightarrow$ M non è diagonalizzabile (no autoval).

Condizione necessaria per diago:

$p_M(t)$ deve avere n radici reali contate con la molt.
[Sappiamo: ne ha sempre n complesse]

Molteplicità: $n = 8$

$$p_M(t) = (t - \sqrt{3})^4 \cdot (t + 11)^3 \cdot (t - 43)$$

radici $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, -11, -11, -11, 43$

oppure $\sqrt{3}$ con molt. 4, -11 con molt 3, 43 con molt. 1.

Es: $M = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 1 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$; $p_M(t) = (t - \sqrt{7})^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{7}$ (unico autoval. $\sqrt{7}$ con molt. 2).

Se fosse diagonalizzabile avrei:

$$X^{-1} \cdot M \cdot X = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

cioè $X^{-1} \cdot M \cdot X = \sqrt{7} \cdot I_2$

dunque $M = X \cdot \sqrt{7} I_2 \cdot X^{-1} = \sqrt{7} \cdot I_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$

Oss: se M ha due autoval. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e v_1, v_2 sono autovett. relativi, cioè

$$M \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$$
$$M \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$$

dunque v_1, v_2 sono lin. indip.

Vero sempre: se $v_1, \dots, v_k$ sono autovett. relativi a autoval. distinti allora sono lin. indip.

Condiz. sufficiente per diago:

ci sono n autoval. distinti.

Come concludere se non sono distinte:
Supponiamo che λ sia radice di $p_M(t)$
con molt. più di 1.

Chiamo: molt. algebrica di λ =
= sua molt. come radice di $p_M(t)$

molt. geometrica di λ
$= \dim(\ker(\lambda \cdot I_n - M))$

Fatto: $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$

Teo: M è diagonalizzabile se e solo se
$p_M(t)$ ha n radici e per ciascuna
si ha che $m.g. = m.a.$

Ricetta per decidere se M è diag.:

- calcolo $p_M(t) = \det(t \cdot I_n - M)$
- cerco le radici
- qualcuna non reale: <u>NO</u>
- tutte reali: distinte? Se sì, <u>OK</u>.

  Se no: guardo quelle con molt. alg. > 1 e controllo che per tutte la m.g. sia uguale alla m.a.; se succede <u>OK</u>, altrimenti <u>NO</u>.

$M = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 1 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$; unico autoval. $\lambda = \sqrt{7}$

m.a. $(\sqrt{7}) = 2$

$$\begin{aligned} \text{m.g.} &= \dim(\operatorname{Ker}(\sqrt{7} \cdot I_2 - M)) \\ &= \dim\left(\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

<u>Non è diagonalizzabile</u>.

Teo (spettrale): $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica allora è diagonalizzabile; anzi esiste una base ortonormale di autovettori di M.

Es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix} = M$

$$p_M(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & -3 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -3 & 2 & t-9 \end{pmatrix}$$

$$= (t-2)(t^2-10t+9) - 6 - 6 - 9(t-1) - (t-9) - 4(t-2)$$

$$= \dots = t^3 - 12t^2 + 15t - 4$$
$$= (t-1)(t^2 - 11t + 4)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-16}}{2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$

tre distinti $\Longrightarrow$ è diago.

Fatto: se cerco autovettori relativi a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trovo v_1, v_2, v_3 ortogonali fra loro (normalizzandoli trovo base ortonormale)!

Cerco $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$;

voglio $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 + 3z_1 = x_1 \\ -x_1 + y_1 - 2z_1 = y_1 \\ 3x_1 - 2y_1 + 9z_1 = z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - y_1 + 3z_1 = 0 \\ -x_1 \qquad - 2z_1 = 0 \\ 3x_1 - 2y_1 + 8z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2z_1 \\ y_1 = z_1 \\ -6z_1 - 2z_1 + 8z_1 = 0 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$