Ist. Mat. I - C/A

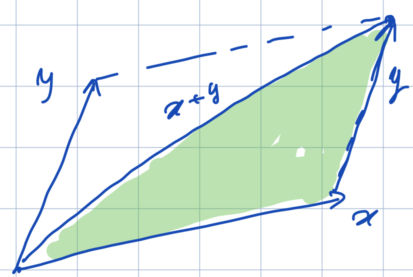
22/4/24

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

- $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ lunghezza di x
- $\cos\left(\widehat{x, y}\right) = \dfrac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}$

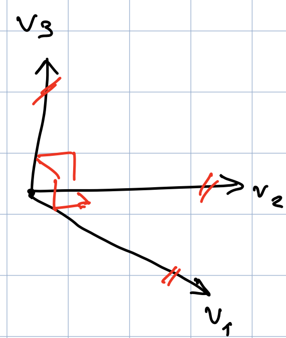
Disuguaglianza tria: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$



<u>distanza</u>: $d(x,y) = \|y - x\|$

- $d(x,y) \geq 0$ nulla solo per $x = y$
- $d(y,x) = d(x,y)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Def: $u \in \mathbb{R}^n$ è unitario se $\|u\| = 1$;
u, v sono ortogonali, $u \perp v$ se $u \cdot v = 0$
$v_1, \dots, v_m$ ortogonali se $v_i \perp v_j$ per $i \neq j$
$v_1, \dots, v_m$ ortonormale se è ortogonale e sono unitari.



Fatto: se $v_1, \dots, v_n$ è base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ allora

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{v \cdot v_i}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

cioè le coordinate di v rispetto alla base sono $\frac{v_1}{\|v_1\|^2}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|^2}$.

Oss: le coord. risp. a base ortog. si ottengono con calcolo diretto.

Es: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}$

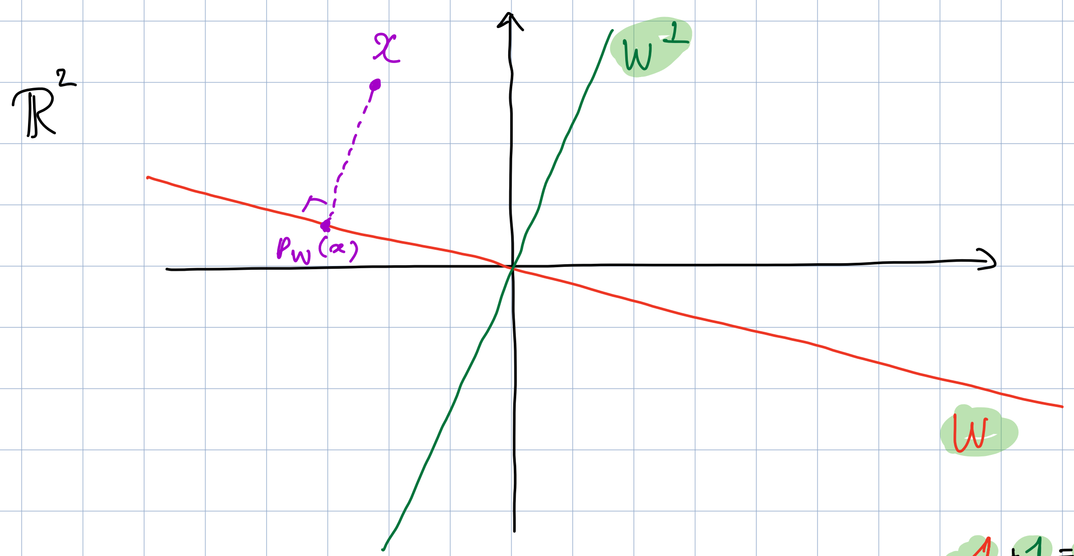
- sono ortog: $v_1 \cdot v_2 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = 6 - 1 - 5 = 0$ ✓
  $v_1 \cdot v_3 = 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 17 + 5 \cdot 5 = -8 - 17 + 25 = 0$ ✓

$$v_2 \cdot v_3 = 3\cdot(-4)+1\cdot 17+(-1)\cdot 5 = -12+17-5=0 \checkmark$$

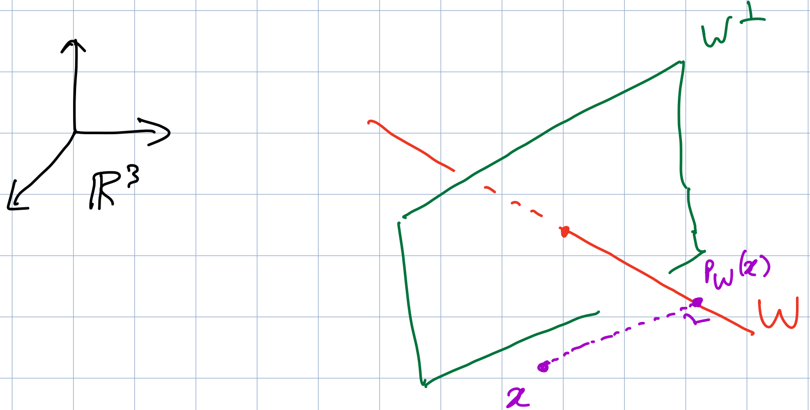
$$\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{-1\cdot 2+3\cdot -1+4\cdot 5}{2^2+(-1)^2+5^2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$+\frac{-1\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot -1}{3^2+1^2+5^2}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{-1\cdot -4+3\cdot 17+4\cdot 5}{(-4)^2+17^2+5^2}\begin{pmatrix}-4\\17\\5\end{pmatrix}$$

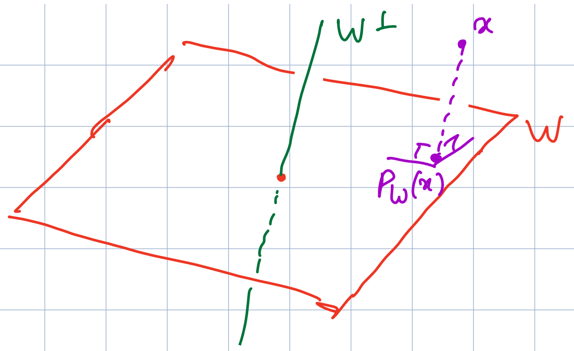
$W\subset\mathbb{R}^n$ sottosp. ; pongo $W^\perp=\{x\in\mathbb{R}^n : x\cdot w=0 \ \forall w\in W\}$



$1+1=2$



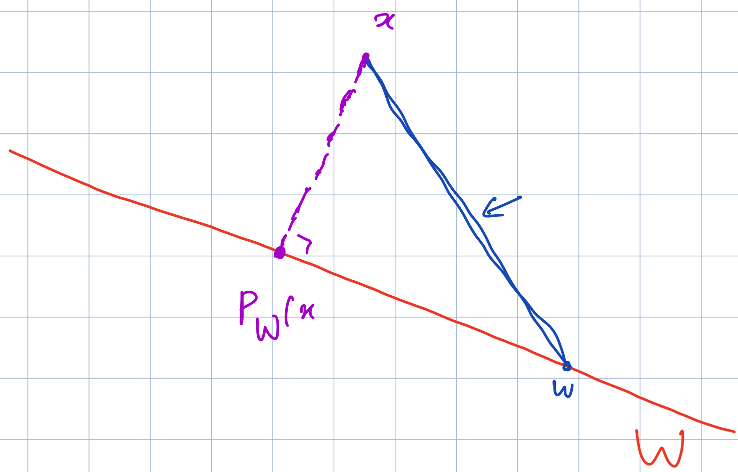
$1+2=3$



$2+1=3$

Fatti: $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ dunque ho le proiezioni associate; chiamo quella su W <u>proiezione ortogonale</u> su W

- $P_W(x)$ è il punto di W più vicino a x



- Se $w_1,\dots,w_k$ è base ortogonale di W allora

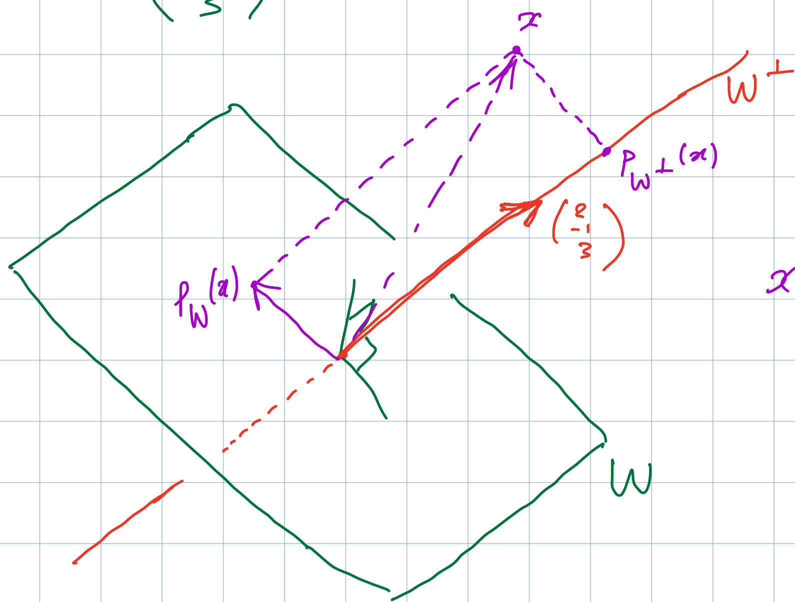
$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{v \cdot w_i}{\|w_i\|^2} \cdot w_i .$$

<u>Ricordo</u>: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ rappresenta una proiezione se e solo se $A \cdot A = A$.

Teo: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ rappresenta una proiezione ortogonale se e solo se $A \cdot A = {}^tA = A$.

$({}^tA = A$: simmetrica$)$

Es: $W = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$



$x = P_W(x) + P_{W^{\perp}}(x)$

$$\Longrightarrow \quad P_W(x) = x - P_{W^{\perp}}(x)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2x_1 - x_2 + 3x_3}{4+1+9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14x_1 & -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ 14x_2 & +2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 14x_3 & -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 13 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{matrice della proiezione ortogonale } A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(evidente che ${}^tA = A$; esercizio $A \cdot A = A$)

Basi ortogonali servono

- calcolare coordinate
- calcolare proiez. ortog.

Come trovarle?

Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

$v_1, \dots, v_m \rightsquigarrow u_1, \dots, u_m$ ortonormale.

<u>Metodo</u>

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

<u>Esempio</u>

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{4+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1) \cdot u_1$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

$$w_3 = w_3 - (w_3 \cdot u_1) \cdot u_1 - (w_3 \cdot u_2) \cdot u_2$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot -1 + -1 \cdot 0}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 14^2 + 5^2}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

$(2 \cdot 7 + (-1) \cdot 14 + 0(-5) = 0 \checkmark)$

.....

Come descrivere un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^n$:

- equazioni parametriche:

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3t + 2s \\ -t + s \\ 4t - 5s \\ 7t + 9s \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W: \begin{cases} x_1 = 3t + 2s \\ x_2 = -t + s \\ x_3 = 4t - 5s \\ x_4 = 7t + 9s \end{cases}$$

- equazioni cartesiane

$$W: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W: \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$W = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{\perp}$$

Come trasformare equaz. cart. in param e vic.

cart $\rightsquigarrow$ param. "risolvere il sistema"

param $\rightsquigarrow$ cart. "eliminare i parametri"

<u>ES</u>:

$$W: \begin{cases} x_1 = 3t + 2s \\ x_2 = -t + s \\ x_3 = 4t - 5s \\ x_4 = 7t + 9s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = s - x_2 \\ x_3 = 4s - 4x_2 - 5s \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -4x_2 - x_3 \\ t = -5x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3(-5x_2 - x_3) + 2(-4x_2 - x_3) \\ x_4 = 7(-5x_2 - x_3) + 9 \cdot (-4x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 23x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_4 + 73x_2 + 16x_3 = 0 \end{cases}$$

Rette in $\mathbb{R}^2$.

Retta param: $\operatorname{Span}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ cart. $\quad y_0 \cdot x - x_0 \cdot y = 0$

Es: $\operatorname{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad 7x + 5y = 0$

Retta cart: $\quad ax + by = 0$

$\rightsquigarrow$ param $\quad \operatorname{Span}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

Es: $\quad 4x + 3y = 0 \quad \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Rette e piani in $\mathbb{R}^3$

Rette param in $\mathbb{R}^3$: $\quad \operatorname{Span}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \text{cart}: \begin{cases} y_0 \cdot x - x_0 \cdot y = 0 \\ z_0 \cdot x - x_0 \cdot z = 0 \\ z_0 \cdot y - y_0 \cdot z = 0 \end{cases}$$ (uno si scarta sempre)

Es: $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ 2x + 7z = 0 \\ \cancel{2y + 3z = 0} \end{cases} \quad \frac{1}{7}(-2\cdot \mathrm{I} + 3 \cdot \mathrm{III})$$

$$-2 \cdot \mathrm{I} + 3 \cdot \mathrm{III}$$

$$\cancel{-6x} + 14y + \cancel{6x} + 21z = 0$$

$$2y + 3z$$

Piano cart. in $\mathbb{R}^3$ $\quad ax + by + cz = 0$

$$\rightsquigarrow \text{param.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}}_{\text{uno si scarta sempre}}$$

Es: $\quad 6x - 5y - 7z = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}} \quad \frac{1}{6}(7 \cdot \mathrm{I} - 5 \cdot \mathrm{II})$$

$$7 \cdot I - 5 \cdot II = \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ -30 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Retta cart. in $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$ per avere forma param: devo trovare vettore $\perp$ a due vettori dati

Piano param in $\mathbb{R}^3$: $\text{Span} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ forma cart: $ax + by + cz = 0$

voglio che $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ siano soluz., cioè

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \end{cases}$$

cioè $$\begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Dunque per passare da param. a cart. per piani, dati due vettori devo trovarne uno a loro ortogonale.

Def: dati $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$

chiamo prodotto vettoriale

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 \cdot z_1 \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

det

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$-$det

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

det

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Prop: •) $v_1 \times v_2$ è $\perp$ sia a v_1 sia v_2

•) $\| v_1 \times v_2 \|$ è l'area del parallelogramma di lati v_1 e v_2

(quindi $v_1 \times v_2 = 0$ se sono lin. dip.)

•) $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ soddisfano regola mano destra (terne levogire).

Es:
$$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -33 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Verifico che $v_1 \times v_2$ sia $\perp$ a v_1 e a v_2:

$$-26 \cdot 7 - 33 \cdot (-4) + 25 \cdot 2 = -182 + 132 + 50 = 0 \checkmark$$
$$-26 \cdot 1 - 33 \cdot 3 + 25 \cdot 5 = -26 - 99 + 125 = 0 \checkmark$$

Piano param. $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

ha equaz. cart. $-26x - 33y + 25z = 0$.

Es: Retta cart. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 7x + y - 5z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 38 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$22 - 114 + 92 = 0 \checkmark$

$77 + 38 - 115 = 0 \checkmark$

forma param.: $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 11 \\ 38 \\ 23 \end{pmatrix}$.