Ist. Mat. I - CIA

17/4/24

- come decidere se esiste A^{-1} per A quadrata, calcolarla
- come trovare $\operatorname{rank}(A)$.

Teo: esiste una sola funzione

$$\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

t.c.

1. lineare in ciascuna colonna fissate le altre
2. cambia segno scambiando due colonne
3. vale 1 su $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Es: $$\det\begin{pmatrix} 3+5\sqrt{2} & 7 \\ -8+10\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -8 & 11 \end{pmatrix} + 5\cdot\det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 7 \\ 2\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$$

Conseguenze:

- $\det(A) \neq 0 \iff A$ invertibile
- (Teorema di Binet)

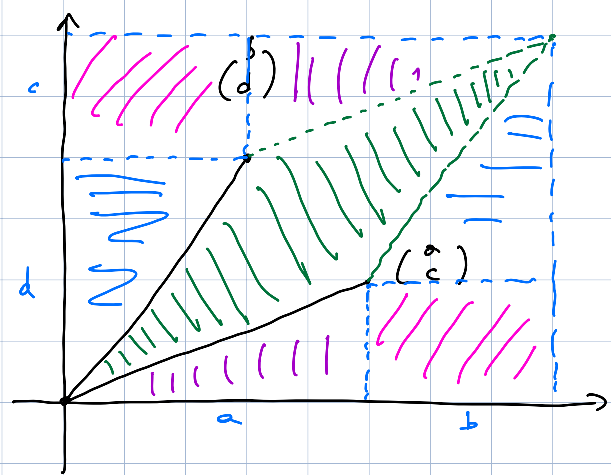
  $$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B).$$

Costruzione per n piccolo:

$n = 1 \qquad A = (a_{11}) \qquad \det_1 (a_{11}) = a_{11}$

$n = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Oss: A invertibile $\iff$ colonne sono lin. indip.



Area: $(a+b)\cdot(c+d) - c\cdot b - c\cdot b - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot c - 2\cdot\frac{1}{2}\, b\cdot d$

$= \cancel{a\cdot c} + a\cdot d + \cancel{b c} + \cancel{b\cdot d} - \cancel{2}\cdot bc - \cancel{a\cdot c} - \cancel{b\cdot d}$

$= a\cdot d - b\cdot c$ <u>area con segno</u>

antiorario $\leadsto$ pos

orario $\leadsto$ neg.

$$\det_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - bc$$

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

area con segno del parallelogramma che ha le colonne per lati.

<u>$n=3$</u> $\det(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ = volume con segno del parallelepipedo che ha $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ come lati.

Regola di Sarrus:

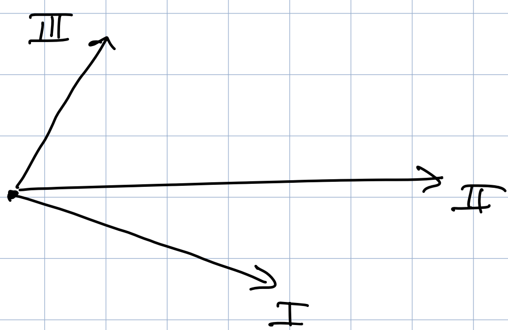
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$
$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

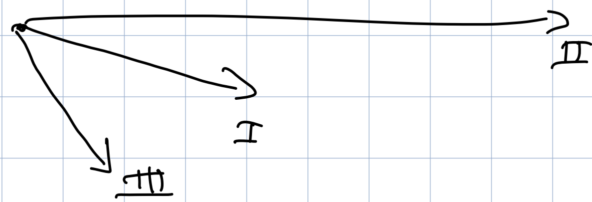
<u>Es</u>: $$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \\ -1 & 5 \end{matrix}$$

$$= 28 - 3 + 0 - 14 - 60 - 0 = \ldots$$

Segno: regola mano destra



$\to$ pos



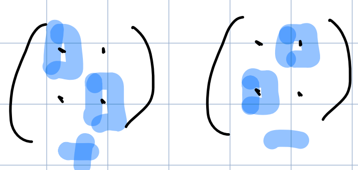
$\to$ neg.

$\det(a_{11}) = a_{11}$ — 1 add. 1 coeff.

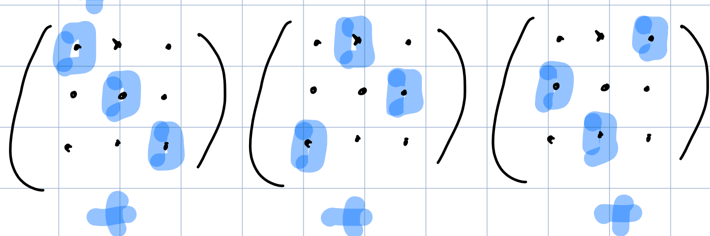
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ — 2 add $\pm$ prod. di 2 coeff.

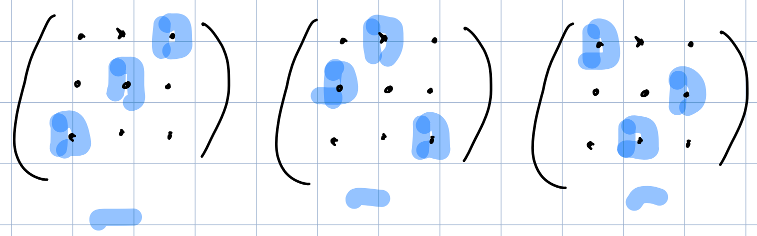
$\det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = +\square + \square + \square - \square - \square - \square$ — 6 add $\pm$ prod. di 3 coeff.

$n = 2$



$n = 3$



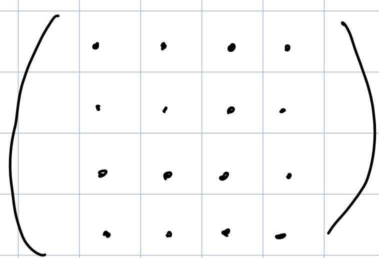


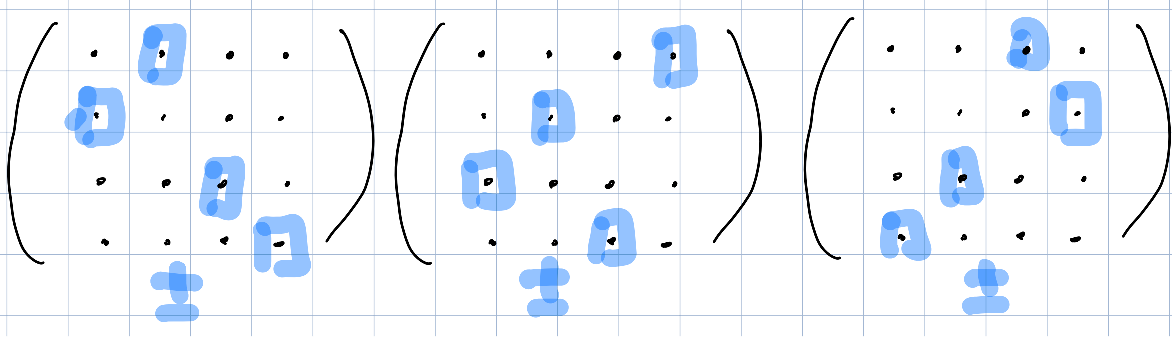
Conclusione: $n = 1,2,3$ $\quad \det_n(A) \quad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

- somma di $n!$ addendi
- ogni addendo è $\pm$ prodotto di n coeff.
- in ogni prodotto i coeff. sono su righe e col diverse tra loro
- tutti tali prodotti (su righe e colonne diverse) compaiono.

Fatto: vero $\forall n$ $\rightsquigarrow$ formula per $\det(n\times n)$
[manca: spiegazione $\pm$]

$n=4$

det  $\rightsquigarrow$ 24 addendi



La formula trovata consente di verificare:

Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ chiamo $A^{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ quella ottenuta da A cancellando riga i e colonna j.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$$

$$A^{21} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$$

- sviluppo di Laplace di $\det(A)$ lungo colonna j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \boxed{a_{ij}} \cdot \det(A^{ij})$$

Es: $\det \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}$

$j=2$

$i=1$ $\qquad\qquad$ $i=2$ $\qquad\qquad$ $i=3$

$$-4 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 9 & \pi \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & \pi \end{pmatrix} - \sqrt{2} \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- $\det({}^tA) = \det(A)$

- sviluppo lungo riga j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} \cdot a_{ji} \cdot \det(A^{ji})$$

$$\det \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow j=1 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$+7 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix} - 4 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 9 & \pi \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

<u>Fatto</u> (segue dal I Teo):

- il det non cambia se sostituisco una riga o colonna con sé stessa + comb. lin. delle altre.

  in particolare: ...... sé stessa + multiplo altra.

<u>Strategia</u>: usare operazioni su righe o colonne per avere molti zeri su una certa colonna o riga e poi sviluppare lungo lei.

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 0 & 7 \\ 13 & 11 & 0 & 7 \\ -18 & -8 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$III_R + 3 \cdot I_R$

$IV_R - 4 \cdot I_R$

$$= (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 13 & 11 & 7 \\ -18 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{\cdots} \cdot 0 \cdot d\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \ldots 0 \cdot \qquad 0 \cdot$$

Formule per l'inversa:

se $\det(A) \neq 0$, $\quad (A^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cdot \det(A^{ji})$

$\boxed{n=2}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$n = 3$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{\underbrace{0-30+8-0-42+80}_{det(A)}}\cdot\begin{pmatrix} -20 & -17 & 15 \\ \boxed{-24} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Conseguenza: metodo di Cramer:

Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile la soluzione del sistema $A\cdot x = b$ è data da

$$x_j = \frac{det\left(\begin{matrix}\text{matrice ottenuta da } A \\ \text{sostituendo } j\text{-esima colonna con } b\end{matrix}\right)}{det(A)}$$

Es: $\begin{cases} 4x - 7y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det = 29 \neq 0$$

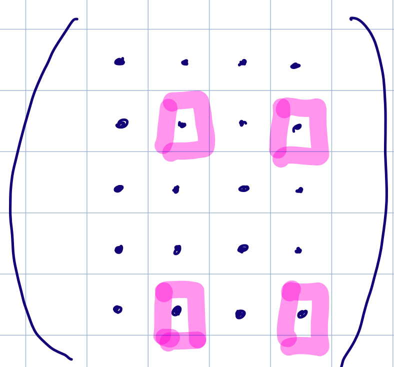
$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{29} = \frac{3}{29} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{29} = -\frac{19}{29}$$

Es:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 5 \\ x + 7y - z = 1 \\ 2x + 4y + 3z = -9 \end{cases}$$

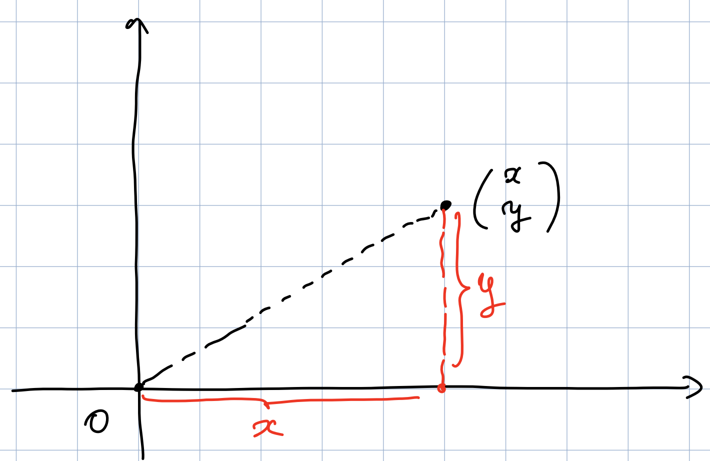
$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -9 & 3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}} = \_\_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_\_$$

Fatto: $\operatorname{rank}(A)$ $\quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
è k se esiste una sottomatrice $k \times k$ di A con $\det \neq 0$ e tutte le sottomatrici $(k+1)\times(k+1)$ hanno $\det = 0$.

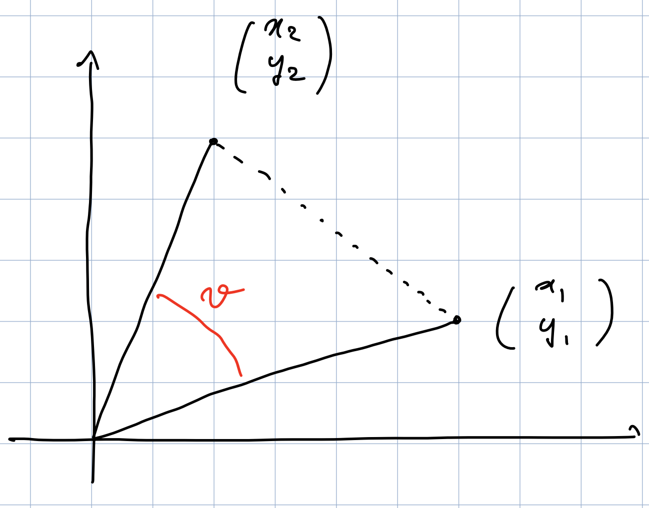


$\mathbb{R}^n$ esiste una naturale nozione di distanza tra due punti dato dalla lunghezza del segmento congiungente, che si calcola con il teorema di Pitagora.

$\boxed{n=2}$

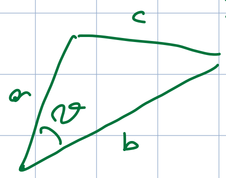


$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x\cdot x + y\cdot y}$$



$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Carnot

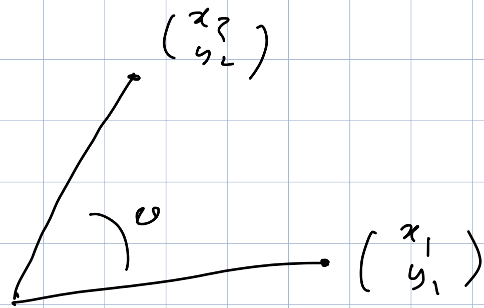


$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\vartheta)$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{\cancel{x_1^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_2^2} - (\cancel{x_1^2}-2x_1x_2+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_1^2}-2y_1y_2+\cancel{y_2^2})}{2\sqrt{\dots}\cdot\sqrt{\dots}}$$

$$= \frac{\boxed{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$$

prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

$$d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x\cdot x + y\cdot y}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Def: chiamo <u>prodotto scalare</u> su $\mathbb{R}^n$ la funzione

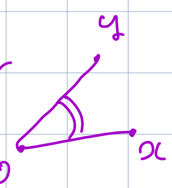
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Chiamo norma associata ad esso

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}\,.$$

<u>Fatto</u>:

- $d(x,y) = \|x-y\|$
- $\cos\Big($  $\Big) = \dfrac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$