Ist. Mat. I - CIA
11/4/24

Sistema lineare di m equaz. in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, x_j incognite.

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$ $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

il sistema è $A\cdot x = b$ con incognita $x \in \mathbb{R}^n$.

Risolvere: trovare tutte le soluzioni.

Oss: 1. Se $b=0$ (dico: sistema omogeneo) allora le soluz. sono

$$\mathrm{Ker}(A)$$

(sottospazio vett. di $\mathbb{R}^n$; contiene 0).

2. Se $b \neq 0$ posso non avere soluzioni; es.

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ -2x + 6y = 11 \end{cases}$$

3. Ho soluzioni di $A \cdot x = b$ precisamente se $b \in \mathrm{Im}(A)$ $\quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

4. Se A è quadrata invertibile allora ho soluz. unica $x = A^{-1} \cdot b$.

Chiamo A matrice incompleta del sistema, (A, b) completa.
Chiamo $A \cdot x = 0$ il sistema omogeneo associato ad $A \cdot x = b$.

Prop: se il sistema $A \cdot x = b$ ha una soluzione x_0 allora le altre soluzioni sono quelle del tipo $x_0 + y$ dove y risolve $A \cdot y = 0$. Cioè:

$$\{x : A \cdot x = b\} = \{x_0 + y : A \cdot y = 0\}.$$

Es: $\circledast \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 10 \\ -4x + y + 6z = 1 \end{cases}$

Noto: ho la soluz. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Omogeneo associato: $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ -4x + y + 6z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4x - 6z \\ 3x - 8x + 12z + 5z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -5x + 17z = 0 \\ y = 4x - 6z \end{cases}$

Soluz. omogenee: $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 17 \\ 38 \\ 5 \end{pmatrix}$

Soluz. di ⊛ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 17 \\ 38 \\ 5 \end{pmatrix}$

Posso anche scrivere

$$\begin{cases} x = 1 + 17t \\ y = -1 + 38t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \qquad \ldots$$

Att: ho anche: le soluz. di ⊛ sono

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 37 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 17\sqrt{2} \\ 38\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Def: chiamo rango di A la dim. della sua immagine come $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (dim. spazio generato dalle colonne).

Teo (Rouché-Capelli):

$A \cdot x = b$ ha soluz. $\iff \mathrm{rank}(A, b) = \mathrm{rank}(A)$.

Questioni:

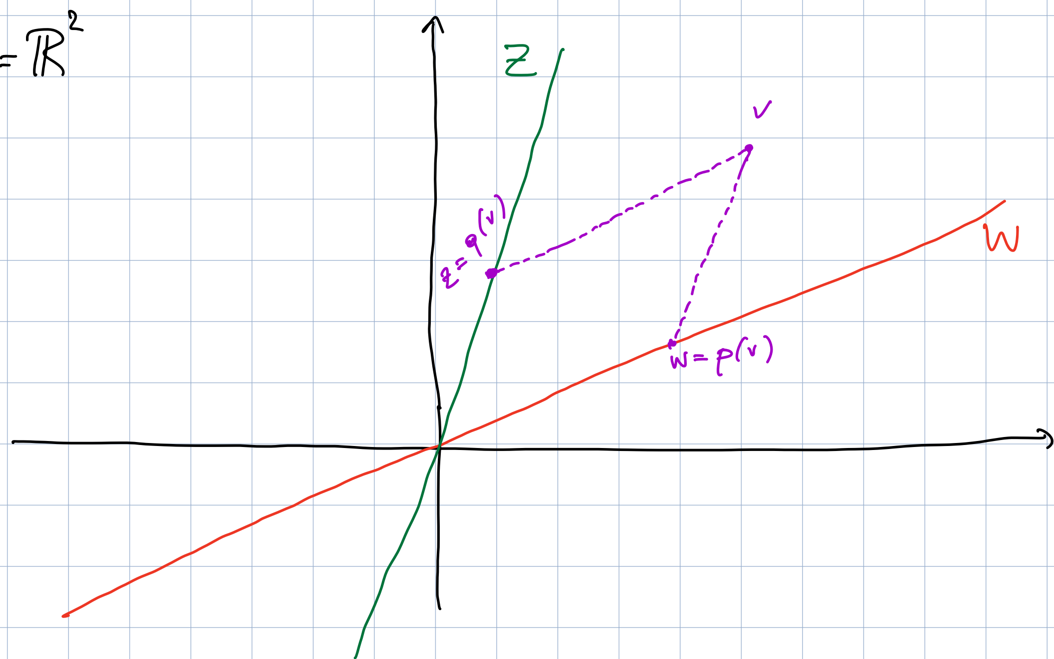
- come decidere se A è invertibile e nel caso come trovare A^{-1}?
- come calcolare $\mathrm{rank}(A)$.

Oss: l'insieme delle soluz. di un sist. lin non cambia se
- riordino le equazioni
- sostituisco un'equazione con $k \cdot$ (sé stessa), $k \neq 0$
- sostituisco un'equazione con sé stessa + comb. lin. delle altre.

V sp. vett. ; W, Z sottospazi. Dico che V si decompone in somma diretta di W e Z, scrivo $V = W \oplus Z$ se $W \cap Z = \{0\}$, $W + Z = V$.

Prop: se $V = W \oplus Z$ allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w + z$ $w \in W$, $z \in Z$. Ponendo $p(v) = w$, $q(v) = z$ ho due applicazioni lineari $p, q : V \to V$.

$V = \mathbb{R}^2$



$V=\mathbb{R}^2 \qquad W=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \qquad Z=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{-5x-7y}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}}_{} + \underbrace{\boxed{3x+4y}\cdot\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}}_{}$$

$$p\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20x-28y\\15x+21y\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}21x+28y\\-15x-20y\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-20 & -28\\15 & 21\end{pmatrix}}_{P}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix}21 & 28\\-15 & -20\end{pmatrix}}_{Q}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Prop: • $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(q)=W$, $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Ker}(p)=Z$

• $p(v)+q(v)=v \quad \forall v$

• $\underbrace{p\circ p=p}_{} \qquad q\circ q=q \qquad \underbrace{p\circ q=0}_{} \qquad q\circ p=0.$

nell'esempio

$$P\cdot P=P$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}-20 & -28\\15 & 21\end{pmatrix}}\cdot\boxed{\begin{pmatrix}-20 & -28\\15 & 21\end{pmatrix}}$$

$$=\begin{pmatrix}400-420 & -28(-20+21)\\15(21-20) & -420+441\end{pmatrix}$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}-20 & -28\\15 & 21\end{pmatrix}}$$

$$P\cdot Q=0$$

$$\begin{pmatrix}-20 & -28\\15 & 21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}21 & 28\\-15 & -20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-420+420 & -20\cdot 28+20\cdot 28\\15\cdot 21-15\cdot 21 & 420-420\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Richiamo:

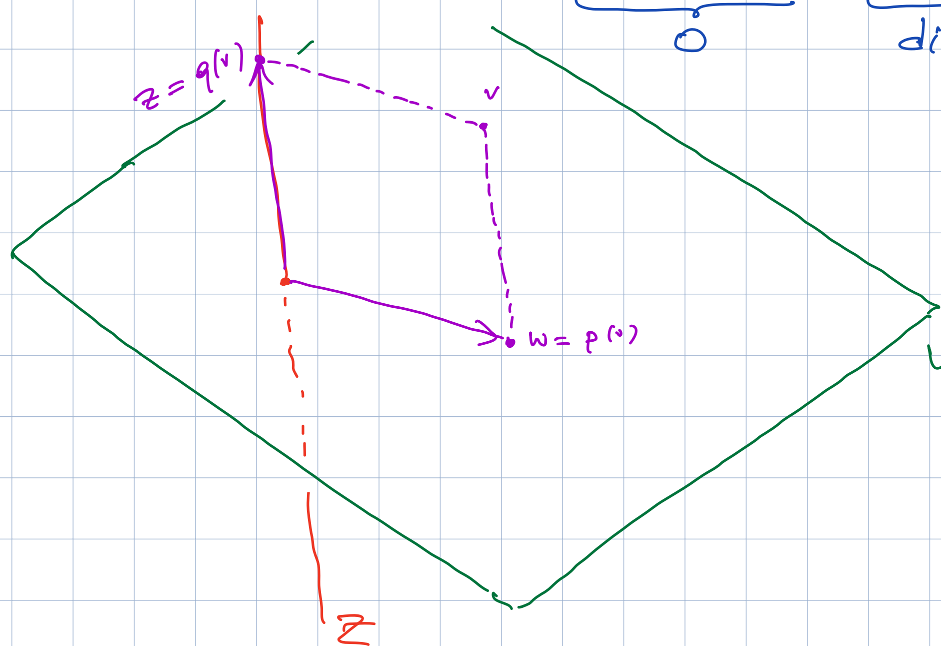
$$V = W \oplus Z \quad \text{se} \quad W \cap Z = \{0\},\ W + Z = V$$

$$v = \underset{\substack{\parallel \\ p(v)}}{w} + \underset{\substack{\parallel \\ q(v)}}{z}$$

p e q sono le proiezioni su W e Z associate alla decomposizione $V = W \oplus Z$.

Oss: se $V = W \oplus Z$

$$\dim(W) + \dim(Z) = \underbrace{\dim(W \cap Z)}_{0} + \underbrace{\dim(W+Z)}_{\dim(V)}$$



Sapendo che $\dim(W) + \dim(Z) = \dim(V)$ basta verificare una sola fra $V \cap W = \{0\}$ e $V + W = V$.

Teo: se $p: V \to V$ è lineare e $p \circ p = p$ allora p è la proiezione su W associata a $V = W \oplus Z$ $\left(W = \mathrm{Im}(p),\ Z = \mathrm{Ker}(p) \right)$.

Coordinate rispetto a base:

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$v \in V$ $\quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ lo indico $[v]_{\mathcal{B}}$

Q: come cambiano le coordinate cambiando base.

Ricordo: $A \in M_{n \times n}$ è invertibile se $\exists A^{-1}$ t.c. $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$.

Def: se ho basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$

chiamo <u>matrice di cambio di base</u> la $M = (m_{ij})$

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \cdot v_i$$

coeff. che esprimono la nuova base in funzione della vecchia.

Prop: se M è la matrice di cambio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$
allora M è invertibile e
$$[v]_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} .$$

Oss:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, bend left, dashed, "M"] & & \mathcal{B}' \arrow[ll, bend left, dashed, "M^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Es: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ $\qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B} \xrightarrow[M]{} \mathcal{B}' \qquad \mathcal{B}' \xrightarrow[N]{} \mathcal{B}$

M: $$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{11}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \boxed{-\frac{13}{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{10}{11}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \boxed{\frac{13}{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -13 & 13 \end{pmatrix}$$

N: $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{10}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -1 & \frac{1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -13 & -10 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -13 & -10 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot \begin{pmatrix} -13(-1-10) & 10-10 \\ 169-169 & +13(10+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[v]_{\mathcal{B}}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{11}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad [v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$[v]_{\mathcal{B}'}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{5}{13}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad [v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}}_{\circ}$$

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 & -10 \\ -13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot \begin{pmatrix} -52+30 \\ -52-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11 \cdot 13} \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ -55 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

—— ∘ ——

<u>Ricordo</u>: $\quad f : V \longrightarrow W$ lineare

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

la matrice associata ad f risp. a $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo è $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ t.c.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i .$$

Prop: se $\mathcal{B} \xrightarrow{M} \mathcal{B}'$
$\mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathcal{C}'$

allora $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = X^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M$

Cor: se $f: V \to V$ e $\mathcal{B} \xrightarrow{M} \mathcal{B}'$
allora $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$.

Def: se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ invertibile
chiamo

$$M^{-1} \cdot A \cdot M$$

coniugata di A tramite M.

Esempio del corollario con $V = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$M = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -13 & -13 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -13 & -10 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y \end{pmatrix}$$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$:
$$f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \frac{35}{11}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \frac{18}{11}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix} = \frac{21}{11}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \frac{35}{11}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}35 & 21\\ -18 & -35\end{pmatrix}$$

$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$:
$$f\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\8\end{pmatrix} = -\frac{6}{13}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} + \frac{37}{13}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-11\end{pmatrix} = \frac{31}{13}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} + \frac{6}{13}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-6 & 31\\ 37 & 6\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-13 & -10\\ -13 & 1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{pmatrix}35 & 21\\ -18 & -35\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1 & -10\\ -13 & 13\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13\cdot 11^2} \cdot \begin{pmatrix}-275 & 77\\ -473 & -308\end{pmatrix} = \frac{1}{13\cdot 11^2} \cdot \begin{pmatrix}-726 & 3751\\ 4477 & 726\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-6 & 31\\ 37 & 6\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$