Ist. Mat. I - CIA
10/4/2024

$Z, W \subset V$ sottosp.

$$\dim(Z) + \dim(W) = \dim(Z \cap W) + \dim(Z + W)$$

1. Esibire oppure provare che non esistono due sottosp. $Z, W \subset V$ t.c. ...

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\dim(Z) = \dim(W) = 2$, $Z \cap W = \{0\}$.

Non esistono:

$$\underbrace{\underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim(Z)} + \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim(W)}}_{4} = \underset{\substack{\| \\ ? \\ 2 \text{ o } 1 \\ \text{mai } 0}}{\dim(Z \cap W)} + \underbrace{\dim(\underbrace{Z + W}_{\text{sottosp. di } \mathbb{R}^3})}_{2 \leq \dim \leq 3}$$

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $\dim(Z) = \dim(W) = 2$, $Z \cap W = \{0\}$

$$\underbrace{\underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim(Z)} + \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim(W)}}_{4} = \underbrace{\underset{\substack{\| \\ ?}}{\dim(Z \cap W)} + \underset{\dim \leq 4}{\dim(\underbrace{Z + W}_{\text{sottosp. di } \mathbb{R}^4})}}_{\text{potrebbe essere } 0 + 4}$$

$W = \mathrm{Span}(e_1, e_2) \qquad Z = \mathrm{Span}(e_3, e_4)$

(c) $V = \{ x \in \mathbb{R}^4 : 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \}$

$\dim(W) = \dim(Z) = 2 \qquad Z \cap W = \{0\}$

$$\underbrace{\underset{2}{\dim(W)} + \underset{2}{\dim(Z)}}_{4} = \underbrace{\dim(W \cap Z)}_{2 \text{ o } 1 \text{ mai } 0} + \underbrace{\dim(\underbrace{W+Z}_{\text{sottosp. di } V})}_{2 \leq \dim \leq 3}$$

Non esistono.

---

2. Esibire o provare che non esiste una $f : V \to W$ lineare t.c. ....

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$

f iniettiva $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$; f surjettiva $\iff \mathrm{Im}(f) = W$

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva?

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=0} + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \underbrace{\dim(V)}_{=2}$$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) \to 2$

Es: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sì

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ iniettiva

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=0} + \dim(\underbrace{\underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\text{sottosp. di } \mathbb{R}^2}}_{\dim \leq 2}) = \underbrace{\dim(V)}_{=3}$$

No

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{=3}) = \underbrace{\dim(V)}_{=2}$$

No

(d) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ surgettiva.

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\,2} = \underbrace{\dim(V)}_{=\,3}$$

Es: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Sì

---

3. Verificare che

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}}_{2\times 2}\right)}_{3\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -8 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 42 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{3\times 3}$$

$\|$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & \cdot & \cdot \\ 38 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

3×2 $\quad 2\times 2$ $\quad 2\times 3$ $\quad 2\times 3$ $\quad 3\times 3$

$$= \begin{pmatrix} 42 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

4. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\quad x \longmapsto A\cdot x$

Esibire basi di $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$ e verificare formula dimensione.

$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : A\cdot x = 0\}$ ⟶ trovare base dello spazio delle soluz. di sistema lineare omog.

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}(\text{colonne di } A)$ ⟶ estrarre base

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Ker}(A) : \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 8z = 0 \\ 4x + y + 6z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -4x - 6z \\ 3x + 8x + 12z + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x + 20z = 0 \\ y = -4x - 6z \end{cases} \qquad \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -20 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$$

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

avendo più 2 vett. lin. indip. in $\mathbb{R}^2$ che ha dim $= 2$, sono base
$\Rightarrow$ il terzo è generato dai primi due
$\Rightarrow$ lo butto di sicuro.

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$$

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=2} = \underbrace{\dim(V)}_{=3}$$

OK

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Ker}(A): \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2x + 5y \\ x + 2y = 0 \\ 3x + y + 10x + 25y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2x + 5y \\ x + 2y = 0 \\ \cancel{13x + 26y = 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \dim = 1$$

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \checkmark & \checkmark & \overset{?}{=} \\ & & 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \quad \text{Sì} \\ & & \times \end{array} \right)$$

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$$

$$\underset{1}{\underset{\parallel}{\dim(\mathrm{Ker}(f))}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{\dim(\mathrm{Im}(f))}} = \underset{3}{\underset{\parallel}{\dim(V)}} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

<u>Oss</u>: il calcolo fatto per estrarre base da colonne di A è implicito nel calcolo di $\mathrm{Ker}(A)$: infatti abbiamo visto che

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$

$$\left(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 0$$

$$\mathrm{III} = 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II}$$

(5) $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -7 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Provare che la formula $g(x) = A \cdot x$ definisca una $g : X \to X$ lineare e che g è invertibile.

$A \in \mathcal{M}_{3\times 3} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f_A(x) = A \cdot x.$

Ora: $X \subset \mathbb{R}^3$ è un sottospazio di $\dim = 2$

La g cercata non è f_A, ma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^3 \\
X \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, dashed, "g"'] & X \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

La costruzione di g funziona se verifico che $\boxed{f_A(X) \subseteq X}$: se ciò è vero la g si può definire ed è lineare

non è vero per una A qualsiasi; per la nostra devo vedere che:

se $x \in X$, cioè $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0}$

anche $A \cdot x$, cioè

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -7 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

appartiene a X:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ -7x_1 + x_2 - 9x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}}$$

appartiene a X

$$(4x_1 - 5x_2 + 3x_3) + (-7x_1 + x_2 - 9x_3) + (x_1 + 2x_2 + 4x_3) = 0 \quad (?)$$

$$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \quad (?)$$

$$-2(\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{0}) = 0 \quad (?)$$

Sì

(invertibile: poiché va da $\underset{\substack{\uparrow \\ \dim = 2}}{X} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \dim = 2}}{X}$

basta verificare che $Ker(g) = \{0\}$ ......)

⑦ Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

(a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{\text{davvero base di } \mathbb{R}^3 \checkmark} \qquad \mathcal{C} = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)}_{\text{davvero base di } \mathbb{R}^2 \checkmark}$

$\Rightarrow f = f_A$

$\Rightarrow [f]_{\mathcal{E}(3)}^{\mathcal{E}(2)} = A$.

Ricordo: nella colonna j di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ si trovano le coord. risp. a $\mathcal{C}$ dell'immagine tramite f del j-esimo vettore di $\mathcal{B}$.

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = -61 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \; 44 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a + 3b = 10 \\ 5a + 7b = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -61 \\ b = 44 \end{cases} \qquad [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -61 & \cdot & \cdot \\ 44 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 20 \end{pmatrix} = -67 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 45 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cdot & -67 & \cdot \\ \cdot & 45 & \cdot \end{pmatrix}$

$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 5a + 7b = -20 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -7 \cdot \mathrm{I} + 3 \cdot \mathrm{II} \\ 5 \cdot \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} \end{array} \quad \begin{cases} (-14 + 15)a = -7 - 60 \\ (15 - 14)b = 5 + 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -67 \\ b = 45 \end{cases}$

$$f\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\end{pmatrix} = \bigcirc\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \bigcirc\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$$