Ist. Mat. I - CIA
13/3/24

$v_1, \dots, v_m$ lin indip ...

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ generato

<u>Prop</u>: $\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{lin. indip}} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_h)$

$\Rightarrow k \leq h.$

<u>Base</u>: lin. indip. che generano + ordinati

Tutte le basi hanno stesso numero di elementi: <u>dimensione</u>

Fissiamo V di $\dim = m$. Allora:

- se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono lin. indip. $\Rightarrow k \leq m$.

<u>Es</u>: $\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ \pi \end{pmatrix}}_{3} \in \underset{\dim = 2}{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow$ sono lin. dip.

- se $v_1, \dots, v_k \in V$ generano V allora $k \geq m$.

Es: $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-7\\\pi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5/4\\e\end{pmatrix}}_{2} \in \mathbb{R}^3$ dim $= 3$

$\Rightarrow$ non generano.

Procedimenti di completamento e estrazione a base:

- Se $v_1,\dots,v_k$ sono lin. indip. posso completarli a base (aggiungere vettori finché diventano base)

$v_1,\dots,v_k$ indip; generano?

→ sì: sono base ✓

→ no: esiste $v \notin Span(v_1,\dots,v_k)$.
Fatto: se aggiungo v ho $v_1,\dots,v_k,v$ sono indip.

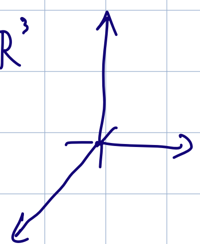
generano?

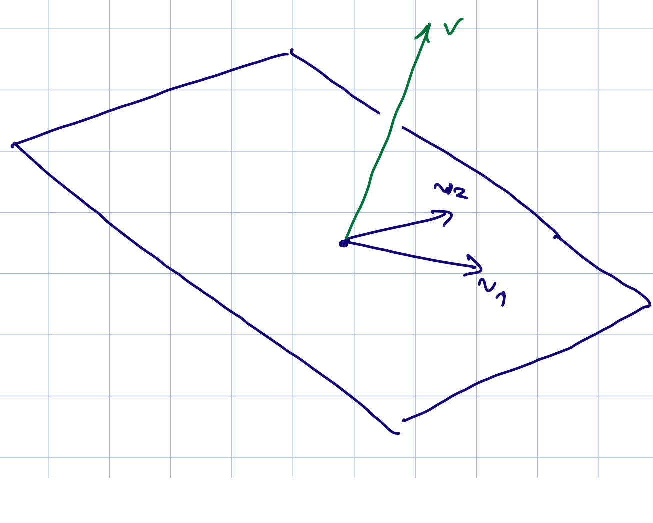
→ sì: ok

→ no: continuo ad aggiungere.

$\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\-7\\\sqrt{3}\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}4\\e\\5/7\end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$





• Se $v_1,\dots,v_k$ generano posso scartarne alcuni per ottenere base

$v_1,\dots,v_k$ generano; lin. indip.?

→ sì: base ✓

→ no: uno di essi è comb. lin degli altri; scartando lui continuano a generare.

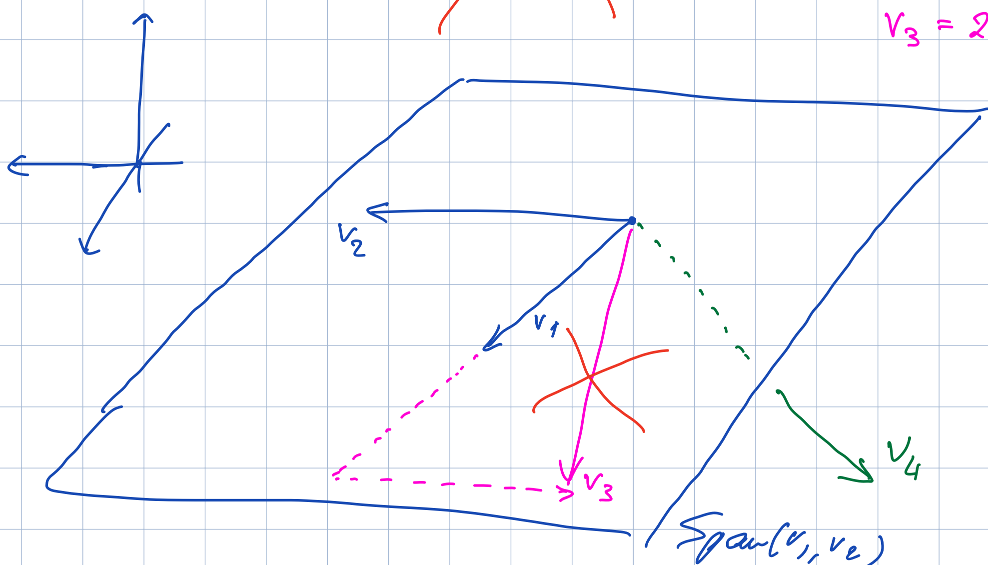
Lo scarto: lin. indip.

→ sì: ✓

→ no: continuo

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}}\checkmark,\ \underset{v_2}{\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}}\checkmark,\ \cancel{\underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\-7\\3\end{pmatrix}}},\ \underset{v_4}{\begin{pmatrix}\pi\\11\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}}\checkmark \in \mathbb{R}^3$$

$v_3 = 2\cdot v_1 - v_2$



Prop: se $\dim(V)=n$ e ho $v_1,\dots,v_n \in V$ allora $v_1,\dots,v_n$ lin. indip $\iff$ generano.

Es: $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Per vedere che sono base basta vedere che sono lin. indip:

$$t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow t=s=0$$

Infatti: $\begin{cases} t-5s=0 \\ 4t+7s=0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=5s \\ 20s+7s=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 27s=0 \\ t=5s \end{cases} \begin{cases} s=0 \\ t=0 \end{cases}$

$v_1,\dots,v_n$ lin. indip $\Longrightarrow$ posso completare a base ma ne aggiungo 0

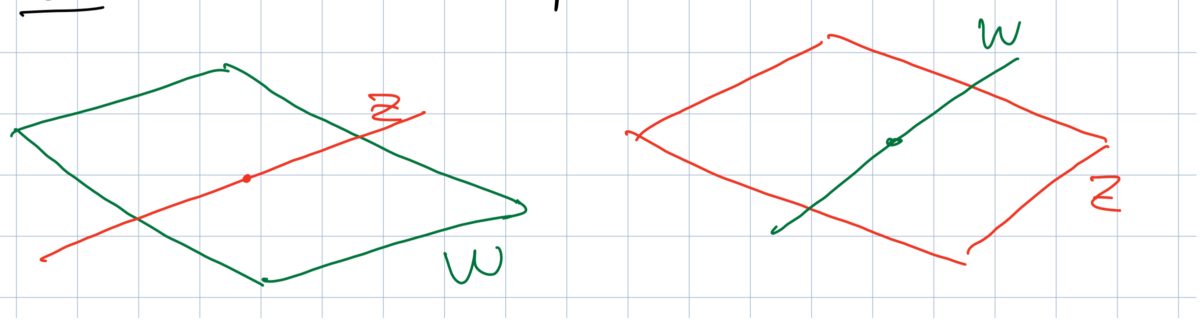
$v_1,\dots,v_n$ generano $\Longrightarrow$ posso estrarre base ma ne scarto 0

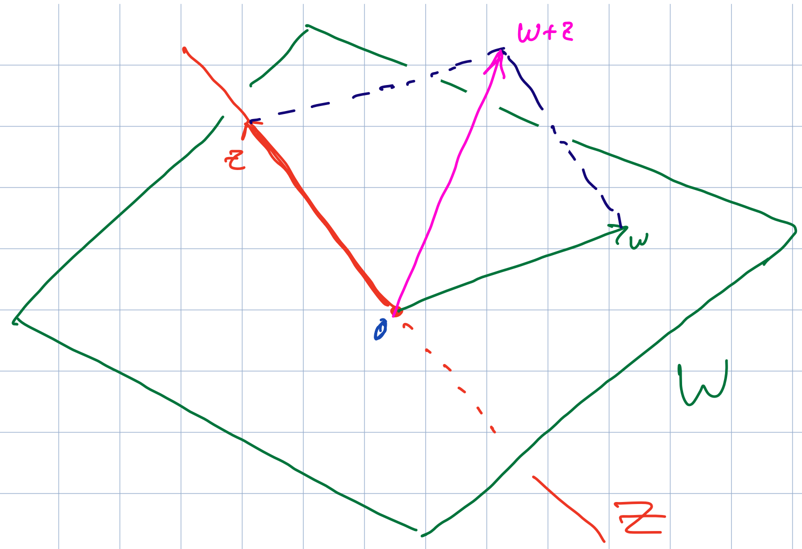
——— o ———

$W, Z \subset V$ sottospazi.

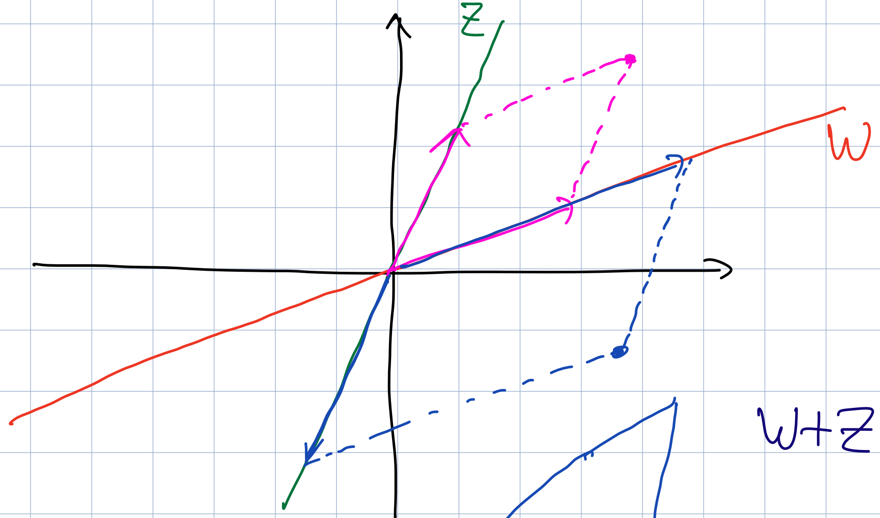
Oss: $W \cap Z$ è sottosp.

Oss: $W \cup Z$ è sottosp. solo se $W \subset Z$ o $Z \subset W$.

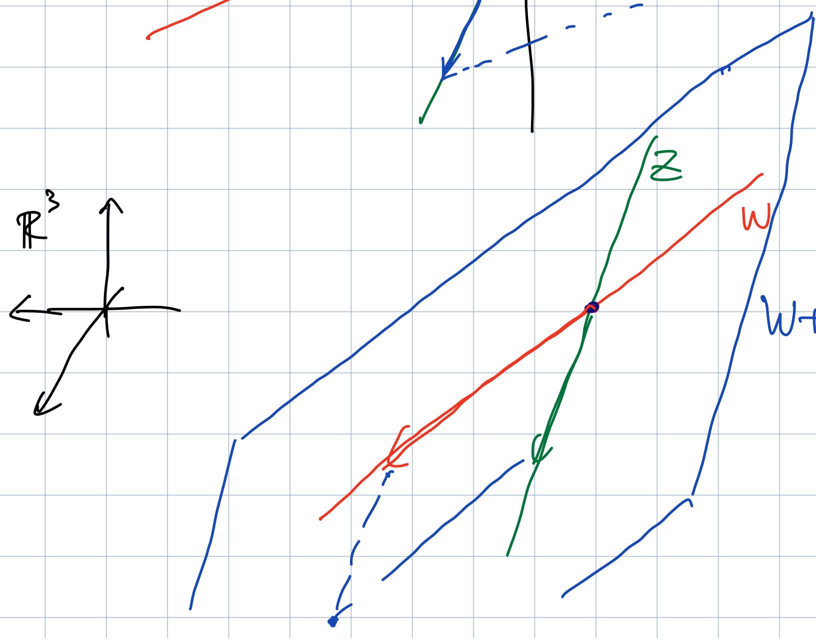




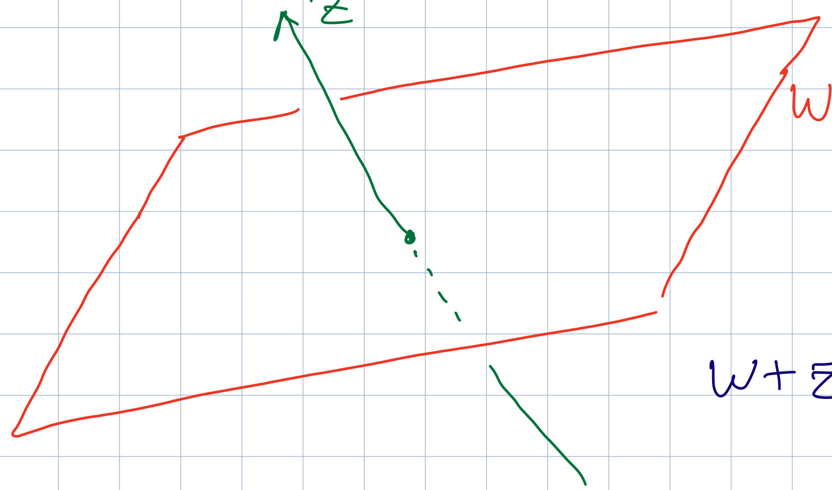
Def: chiamo $W+Z = \{ w+z \; : \; w \in W, z \in Z \}$



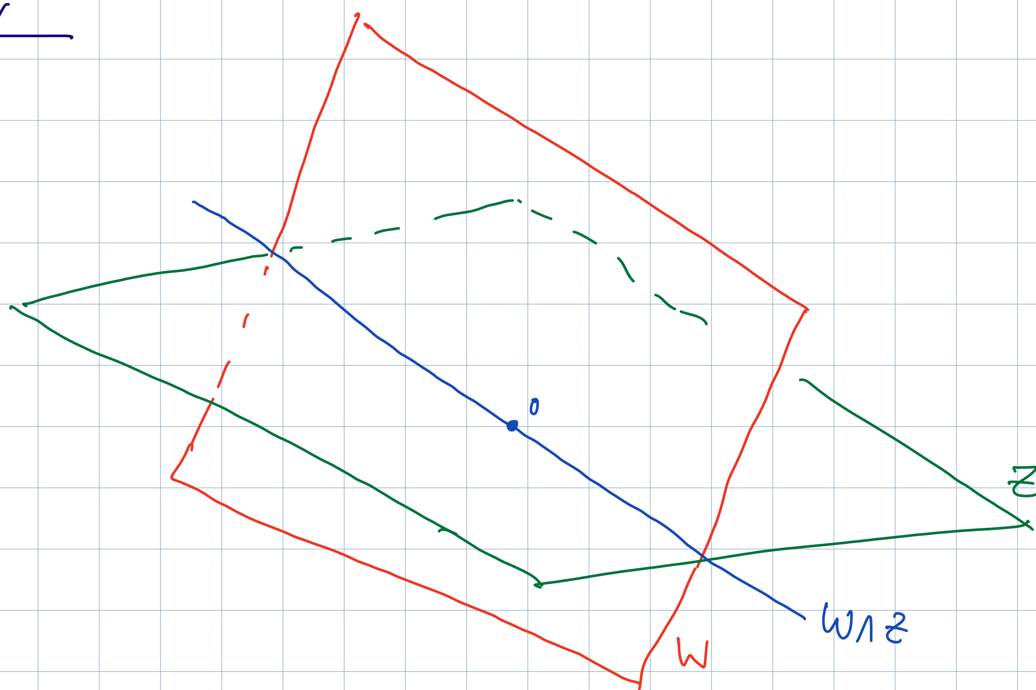
$W+Z = \mathbb{R}^2$



$W+Z$ = il piano che contiene le due rette.



$W + Z = \mathbb{R}^3$



$W + Z = \mathbb{R}^3$

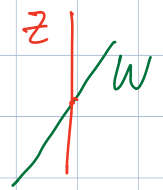
<u>Fatto</u>: $W+Z$ è un sottospazio di V; inoltre è il più piccolo che contiene $W \cup Z$.

Teo (formula di Grassmann): dati sottosp. W, Z di V

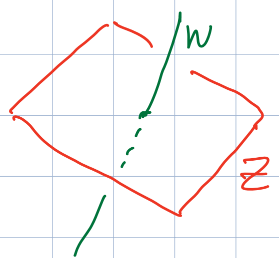
$$\dim(W) + \dim(Z) = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$$

Esempi:

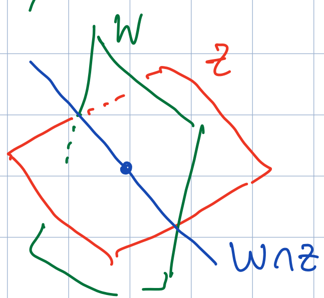
$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$



$1 + 1 = 0 + 2$ ✓



$1 + 2 = 0 + 3$ ✓



$2 + 2 = 1 + 3$ ✓

$$\dim(W) + \dim(Z) = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$$

Es. in $\mathbb{R}^3$: $\dim(W) = \dim(Z) = 2$

$$2 + 2 = \underset{\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}}{\dim(W \cap Z)} + \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^4 \qquad 2+2 = \dim(W\cap Z) + \begin{cases}2\\3\\4\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\\1\\0\end{cases}$$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad 2+2=0+4$$

$$Z = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

———— o ————

- Possono esistere in $\mathbb{R}^7$ due sottosp. di dim 4 e 5 con intersez. di dim. 1 ?

$$4+5 = \dim(W\cap Z) + \begin{cases}5\\6\\7\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\\3\\2\end{cases}$$

$\boxed{\text{No}}$

- Possono esistere in $\mathbb{R}^8$ due sottosp. di dim 4 e 3 la cui somma è tutto $\mathbb{R}^8$?

$$4 + 3 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} + 8$$

$\underline{\underline{No}}$

—— o ——

$$\underset{\substack{\| \\ p}}{\dim(W)} + \underset{\substack{\| \\ q}}{\dim(Z)} = \underset{\substack{\| \\ k}}{\dim(W \cap Z)} + \dim(W+Z)$$

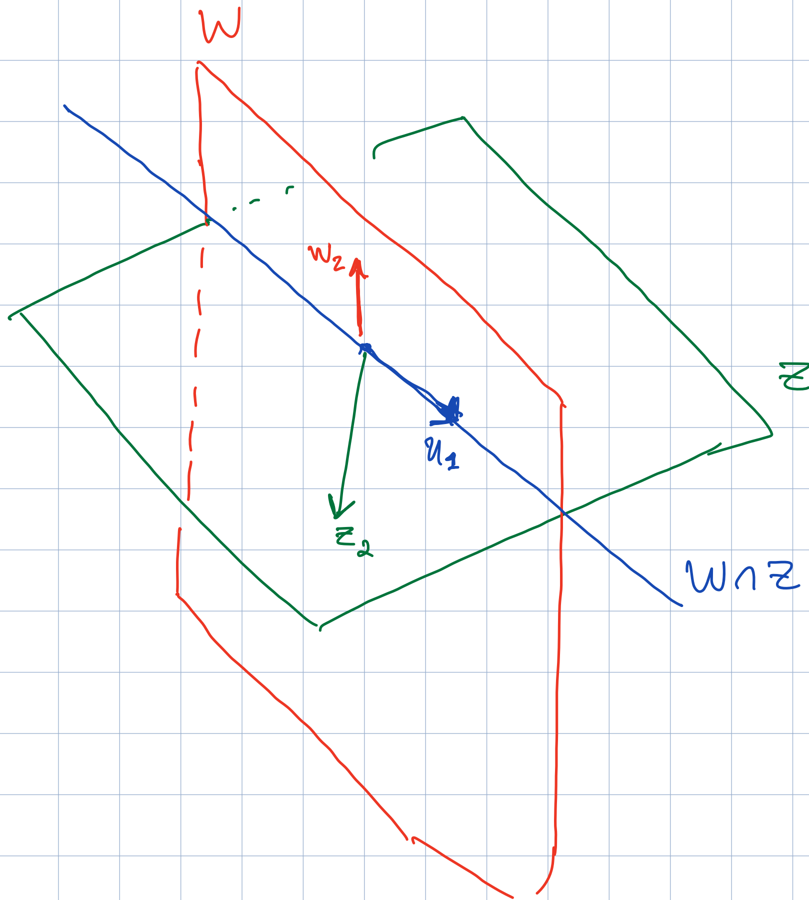
<u>Tesi</u>: $\dim(W+Z) = p+q-k$

$u_1, \dots, u_k$ base di $W \cap Z$

completo a $u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_p$ base di W

completo a $u_1, \dots, u_k, z_{k+1}, \dots, z_q$ base di Z.

Affermo che $\underbrace{\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{k}, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_p}_{p-k}, \underbrace{z_{k+1}, \dots, z_q}_{q-k}}_{p+q-k}$ sono base di $W+Z$.



Sp. vett: V con

$$V \times V \to V \qquad\qquad \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \qquad\qquad (t, v) \mapsto t \cdot v$$

va bene qualsiasi campo
ad. es. $\mathbb{C}$

Es: $\mathbb{C}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7-2i \\ 4 \\ 2-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-i \\ 6-3i \\ 7-5i \end{pmatrix}$$

$$(1+i) \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3+7i \\ 7+7i \end{pmatrix}$$

V, W sp. vett. $f: V \to W$ si dice applicazione <u>lineare</u> se rispetta le operaz. di sp. vett.

$$f(t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2) = t_1 \cdot f(v_1) + t_2 \cdot f(v_2)$$

Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + x_2 \\ x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$.

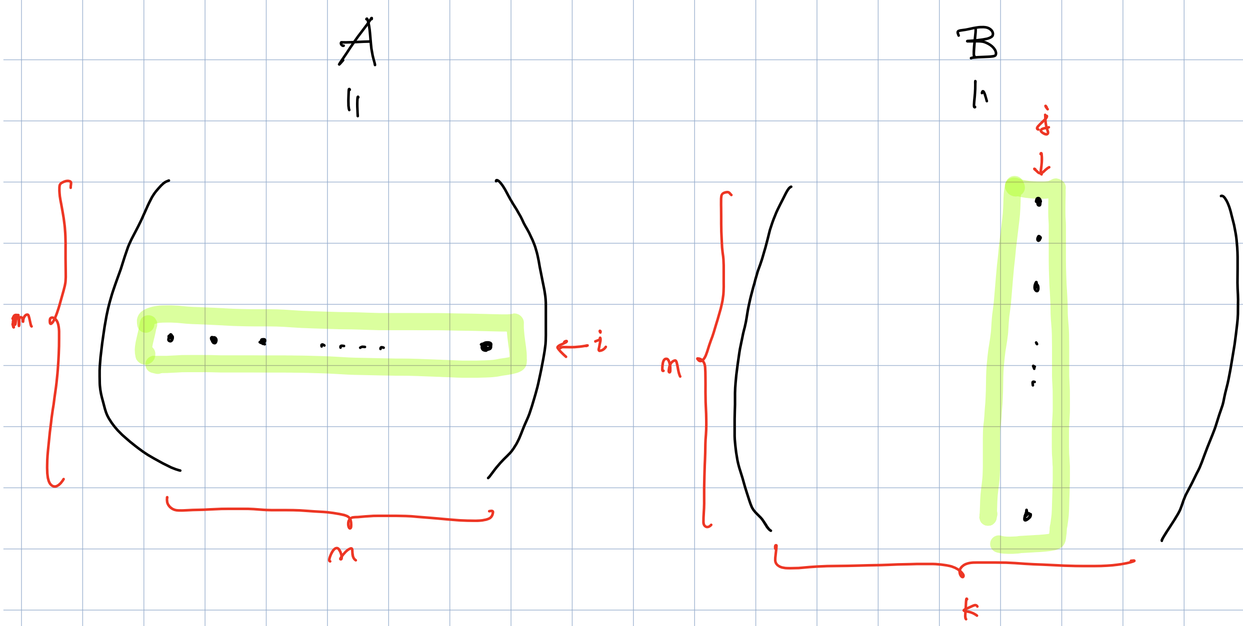
Lineare? $f(t \cdot x + s \cdot y) \overset{?}{=} t \cdot f(x) + s \cdot f(y)$

$$f(t \cdot x + s \cdot y) = f\begin{pmatrix} tx_1 + sy_1 \\ tx_2 + sy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(tx_1 + sy_1) - (tx_2 + sy_2) \\ 5(tx_1 + sy_1) + (tx_2 + sy_2) \\ (tx_1 + sy_1) - 7(tx_2 + sy_2) \end{pmatrix}$$

$$t \cdot f(x) + s \cdot f(y) = t \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + x_2 \\ x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ 5y_1 + y_2 \\ y_1 - 7y_2 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe x colonne di matrici

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad B \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$$



$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times k}{B} \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip} \cdot (B)_{pj}$$

Sto dicendo chi sta nel posto (i,j) di $A \cdot B$

elem. n riga i di A

elem. n riga j di B

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×4

$$= \begin{pmatrix} \square & \boxed{-10} & \square & \square \\ \square & \square & \square & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

Prop:

- $A \cdot (t_1 \cdot B_1 + t_2 \cdot B_2) = t_1 \cdot A \cdot B_1 + t_2 \cdot A \cdot B_2$
- $(t_1 \cdot A_1 + t_2 \cdot A_2) \cdot B = t_1 \cdot A_1 \cdot B + t_2 \cdot A_2 \cdot B$

Corollario:

- fissata $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R}) \\ B &\longmapsto A \cdot B \end{aligned}$$

è lineare.

- fissata $B \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A \cdot B \end{aligned}$$

è lineare.

Caso particolare $k = 1$:

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$

$A \cdot B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$

Dunque: data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'applicazione

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

è lineare (detta associata ad A).

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f_A(x) = \underbrace{\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 1}{x}}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Verifico la linearità di f_A con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Devo vedere $f_A(t \cdot x + s \cdot y) = t \cdot f_A(x) + s \cdot f_A(y)$.

cioè $\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{(t \cdot x + s \cdot y)}_{n \times 1} = \underbrace{t \cdot \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{x}_{n \times 1}} + \underbrace{s \cdot \underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{y}_{n \times 1}}$

$m \times 1$ $\qquad$ $m \times 1$ $\quad$ $m \times 1$

$m \times 1$

Dunque entrambi sono vettori colonna alti m: al posto i

$$a_{i1}\cdot(tx_1+sy_1)+\dots+a_{in}\cdot(tx_n+sy_n)$$

$$\overset{?}{=} t\cdot(a_{i1}\cdot x_1+\dots+a_{in}\cdot x_n)+s\cdot(a_{i1}y_1+\dots+a_{in}y_n)$$

$\underline{\underline{\text{Sì}}}$