Ist. Mat. I - CIA
6/3/24

$V \quad + \quad \cdot \qquad \underset{V}{v} + \underset{V}{w} \qquad \underset{\mathbb{R}}{t} \cdot \underset{V}{v}$

Es: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]$

combinaz. lin. di $v_1, \dots, v_n$ con coeff. $t_1, \dots, t_n$

$$t_1 \cdot v_1 + \dots + t_n \cdot v_n .$$

Def: $v_1, \dots, v_n$ sono
- linearmente indipendenti se l'unica comb. lin. che ha risultato 0 è quella con tutti i coeff. 0
- generano V se ogni $v \in V$ si può scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.

$\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. dip., non genera

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ lin. indip., non genera

$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ lin dip, non generano

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 17 \end{pmatrix}$ <u>lin indip</u>, generano + <u>espr. unica</u>

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ -\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ <u>lin. dip.</u> generano + <u>espr. non unica</u>

Def: una base di V è $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ con $v_1, \dots, v_n$ lin. indip e generatori.

primo secondo ... n-esimo

insieme ordinato

Fatto: se $v_1, \dots, v_n$ generano V

lin. indip. $\Longleftrightarrow$ ogni $v \in V$ ha espressione unica come loro comb. lin.

Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base di V

e v si scrive come $v = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$

pongo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e chiamo x vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, indicato con $[v]_{\mathcal{B}}$.

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$

Affermo che è base (...)

Trovo $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2 \\ x_2 = -\frac{7}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ 2x_3 - 4 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{1}{3} - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{3}{13} \cdot \frac{11}{3} = -\frac{11}{13} \\ x_1 = \frac{37}{13} \\ x_2 = \frac{77 + 13}{39} = \frac{90}{39} \end{cases}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 37/13 \\ 90/39 \\ -11/13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Basi canoniche:

$\boxed{\mathbb{R}^n}$

$$e_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_j^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

in $\mathbb{R}^3$ $\quad e_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

in $\mathbb{R}^4$ $\quad e_2^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}^{(n)} = (e_1, \ldots, e_n).$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ \pi \end{pmatrix} = \boxed{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{-4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In generale: $[x]_{\mathcal{E}^{(n)}} = x$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}^{(n)}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

$M_{2 \times 3}$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{posto } i,j \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\left(E_{ij} \right)_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}} \quad \text{base canonica di } M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

__Fatto__: $\mathbb{R}[x]$ non ha basi, infatti non ha insiemi finiti di generatori.

$$t_1\cdot\left(1+\sqrt{3}\,x+7x^4\right)+t_2\cdot\left(-11+\frac{4}{3}x+9x^2-17x^5\right)+t_3\cdot\left(x^2-\pi x^3+19x^4-x^{33}\right)$$

non si realizza x^{1000}

$$\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

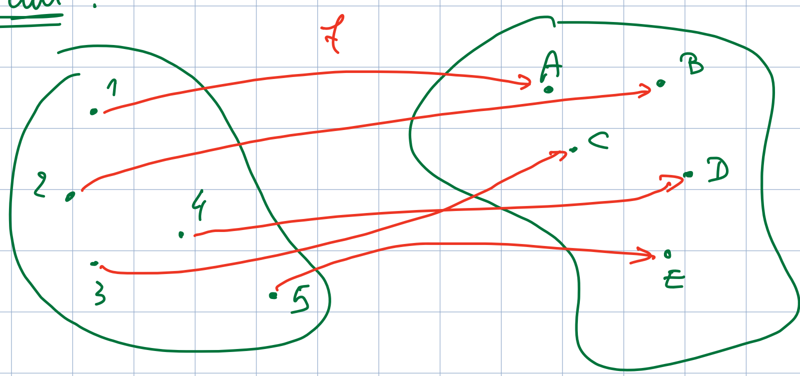
$$\mathbb{R}^3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} : x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$$

Domanda: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ con $n\neq m$ sono intrinsecamente diversi?

Come insiemi:



bijezione

Fatto: esistono bigezioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ per $n \neq m$.

Teo: se V ammette basi allora tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

$\mathbb{R}^2$: $\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \qquad \left(\begin{pmatrix} 2 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

$$\cancel{\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -\pi \end{pmatrix} \right)} \qquad \cancel{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right)}$$

Att: $\cancel{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)}$

Def: se tutte le basi di V hanno n elementi chiamo n la <u>dimensione</u> di V, pongo

$$\dim(V) = n$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = n.$$

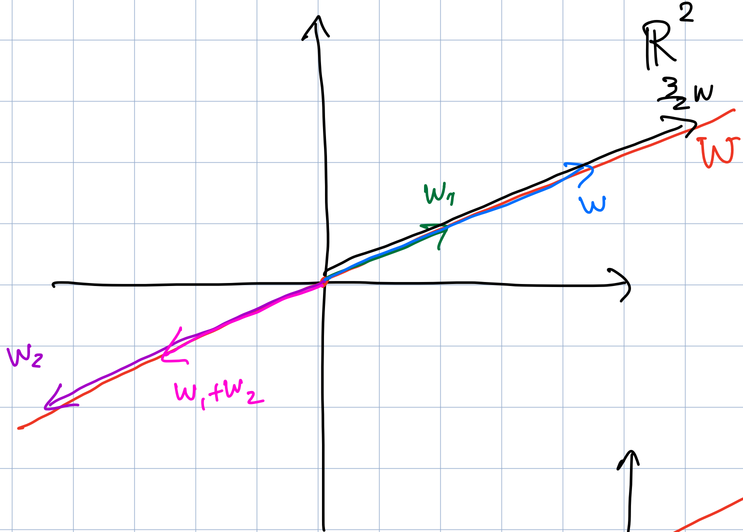
Dunque $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$

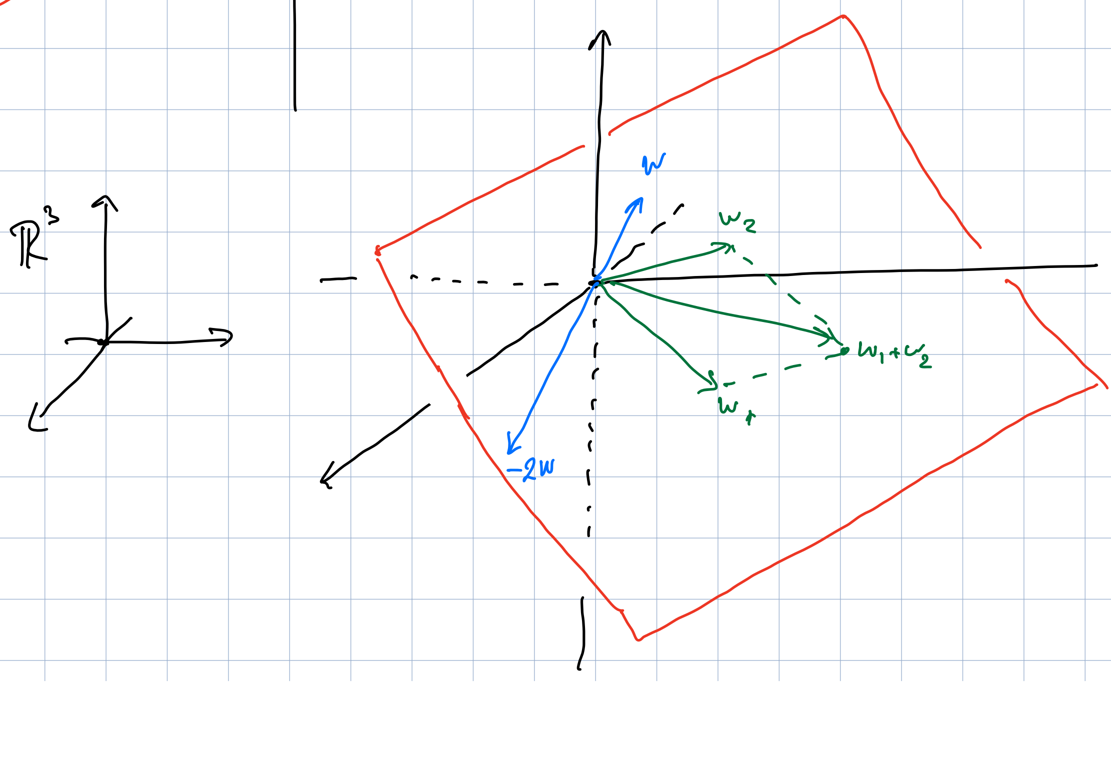
$$\dim_{\mathbb{R}}(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$$

Conseguenza: "$\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono diversi per $n \neq m$ come spazi vettoriali" (anche se uguali come insiemi).

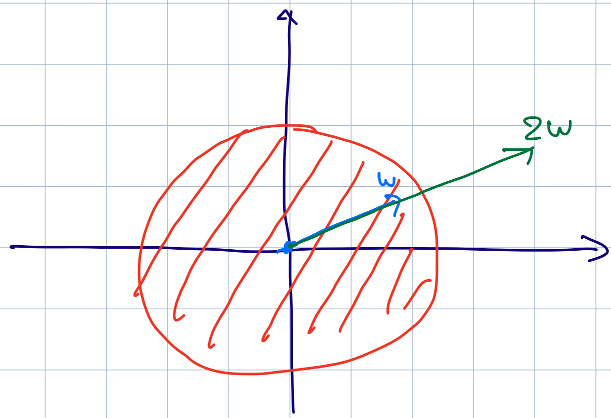
Dato V sp. vett. un sottoinsieme W è un sottospazio vettoriale se

- $0 \in W$
- $w_1, w_2 \in W \Longrightarrow w_1 + w_2 \in W$
- $w \in W,\ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow t \cdot w \in W$

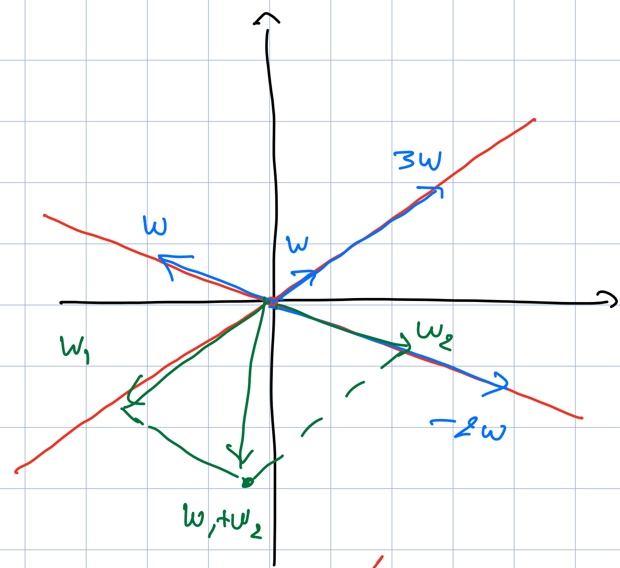




W è sottospazio vettoriale se facendo dentro W le operazioni di V non si esce da W.



No



No

<u>Oss</u>: W "eredita" le operazioni di V e con esse è uno spazio vettoriale.

<u>Es</u>: $V=\mathbb{R}^3$ $\quad W=\left\{x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : 5x_1-2x_2+7x_3=0\right\}$

Verifico che è sottospazio:

- $0\in W$: $0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$: $5\cdot 0-2\cdot 0+7\cdot 0=0$ ✓
- $x,y\in W$ $\quad 5x_1-2x_2+7x_3=0$
  $5y_1-2y_2+7y_3=0$

$$x+y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \quad \underbrace{5\cdot(x_1+y_1)-2\cdot(x_2+y_2)+7(x_3+y_3)}=0$$

$$(\underbrace{5x_1-2x_2+7x_3}_{0})+(\underbrace{5y_1-2y_2+7y_3}_{0}) \quad \checkmark$$

- $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in W$, cioè $5x_1-2x_2+7x_3=0$

$t\in\mathbb{R} \qquad t\cdot x=\begin{pmatrix} t\cdot x_1 \\ t\cdot x_2 \\ t\cdot x_3 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{5\cdot(t\cdot x_1)-2\cdot(t\cdot x_2)+7\cdot(t\cdot x_3)}=0$$

$$t\cdot(\underbrace{5x_1-2x_2+7x_3}_{0}) \quad \checkmark$$

$$W=\{x\in\mathbb{R}^3 : \ 5x_1-2x_2+7x_3=0\}$$

Affermo che $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ è base di W.

- sono in W: $5\cdot(-1)-2\cdot(1)+7\cdot(1)=0$ ✓
  $5\cdot(1)-2\cdot(6)+7\cdot(1)=0$ ✓

- sono lin. indip. $t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -t+s=0 \\ t+6s=0 \\ t+s=0 \end{cases} \Longrightarrow t=s=0$$

- generano: se $x\in W$, cioè $5x_1-2x_2+7x_3=0$

riesco a risolvere

$$t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -t+s = x_1 \quad \checkmark \\ t+6s = x_2 \\ t+s = x_3 \quad \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} s = \dfrac{x_1+x_3}{2} \\ t = \dfrac{x_3-x_1}{2} \\ \dfrac{x_3-x_1}{2} + 6\dfrac{x_1+x_3}{2} = x_2 \end{cases}$$

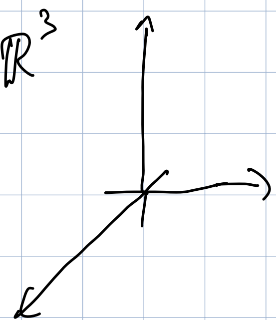
$$x_3 - x_1 + 6x_1 + 6x_3 = 2x_2$$

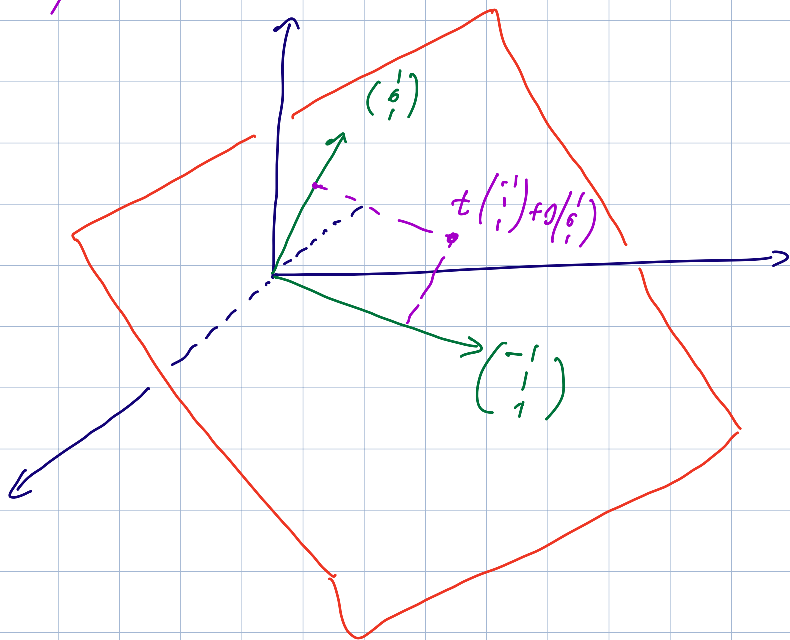
$$5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0$$

genero e

$$[x]_B = \begin{pmatrix} (x_3-x_1)/2 \\ (x_1+x_3)/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^3$



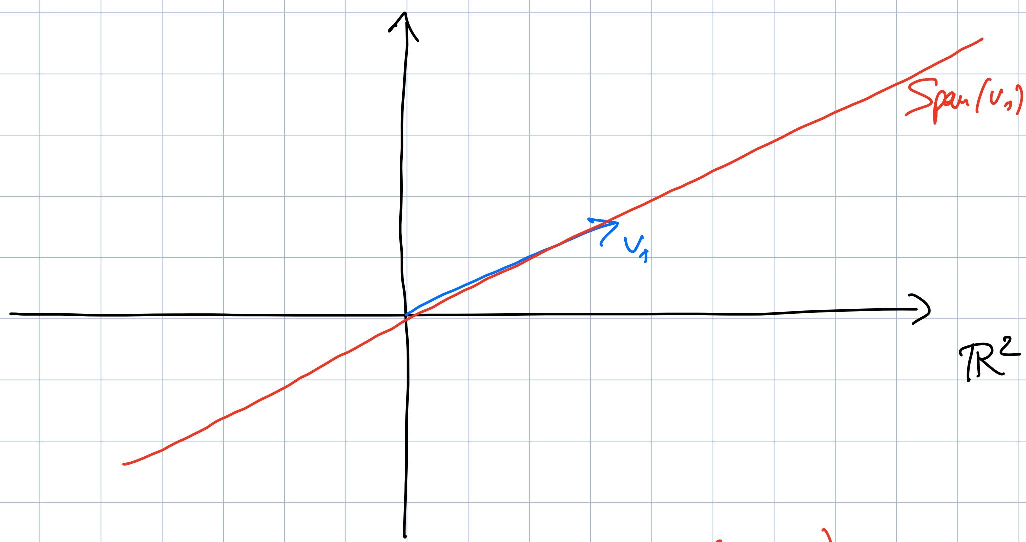


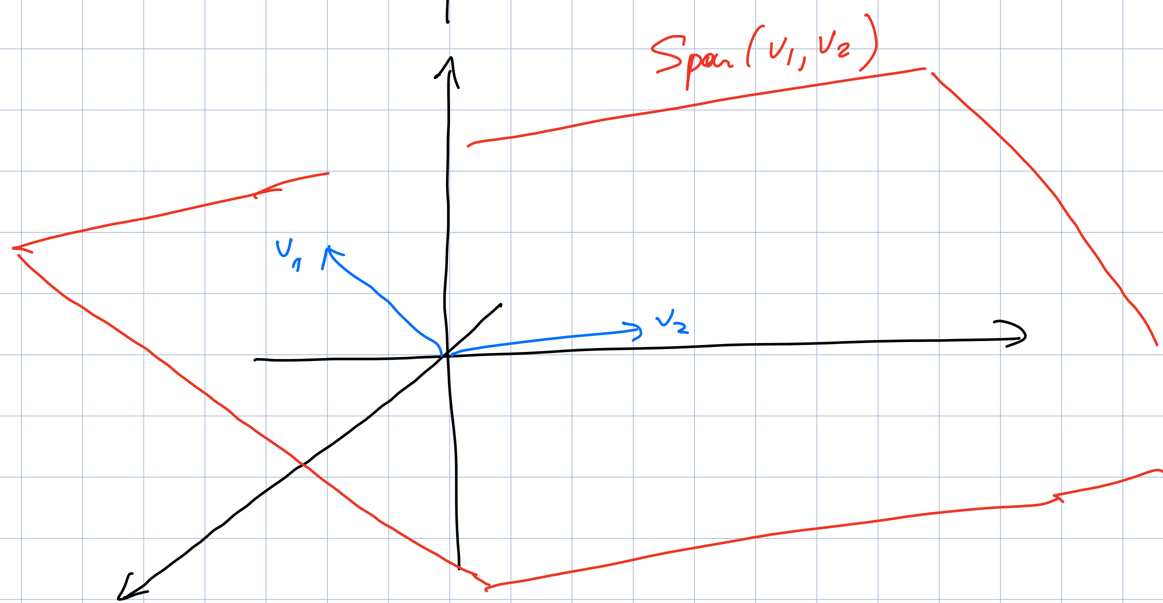
$\Longrightarrow \dim(W) = 2.$

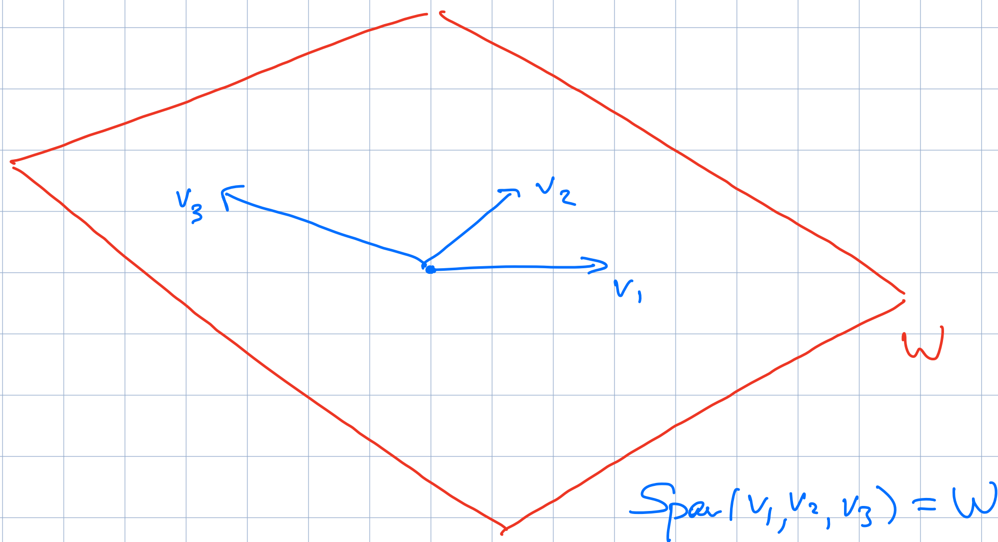
Def: se $v_1, \dots, v_m \in V$, chiamo sottospazio generato da V l'insieme

$$\mathrm{Span}(V) = \{ t_1 v_1 + \dots + t_m v_m : t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R} \}$$

Esercizio: è sempre un sottospazio vettoriale.







$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = W$

Prop: se in V ho vettori $w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n$
con
- $w_1, \dots, w_m$ lin. indip.
- $w_1, \dots, w_m \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

allora $m \leq n$.

Dimostrazione per induzione (dispense)

Ne deduco che due basi hanno stesso numero di elem:

$$\mathcal{B} = \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = V} \qquad \mathcal{C} = \underbrace{(w_1, \dots, w_m)}_{w_1, \dots, w_m \text{ lin. indip}}$$

$$\Downarrow$$

$$m \leq n$$

Simmetricamente: $n \leq m \implies m = n$.

In ogni sp. vett. V ho sempre due sottosp. banali: $\{0\}$, V.

Esempio: I sottosp. di $\mathbb{R}^2$ sono

$\{0\}$ (dim $= 0$), le rette (dim $= 1$), $\mathbb{R}^2$ (dim $= 2$)

I sottosp. di $\mathbb{R}^3$ sono

$\{0\}$ (dim $= 0$), le rette (dim $= 1$), i piani (dim $= 2$), $\mathbb{R}^3$ (dim $= 3$)

Oss (segue dalla prop): se W è sottosp. di V allora $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Es: $\mathbb{R}[x]$ non ha basi ($\dim(\mathbb{R}[x]) = +\infty$)

$\mathbb{R}_{\leq d}[x]$ = i polinomi di grado al più d (compreso 0).

$p(x) \in \mathbb{R}_{\leq d}[x]$

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_d \cdot x^d$$
$$= \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a_0}} \cdot 1 + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a_1}} \cdot x + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a_2}} \cdot x^2 + \dots + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{a_d}} \cdot x^d$$

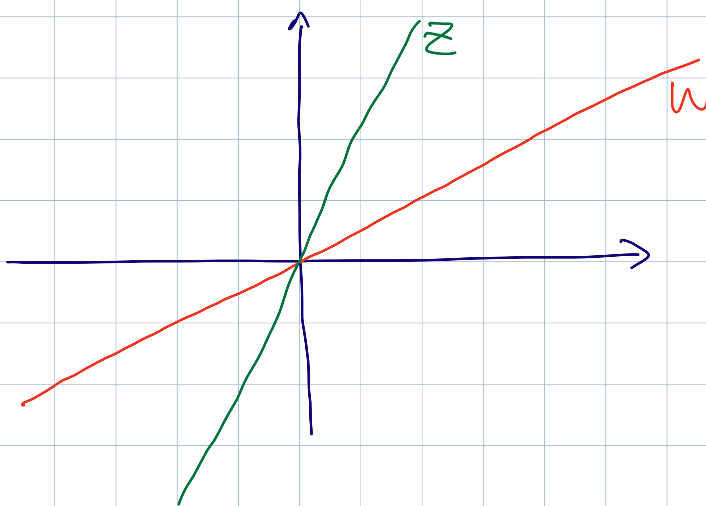
$\Rightarrow \mathbb{R}_{\le d}[x]$ ha base canonica $(1, x, x^2, \dots, x^d)$

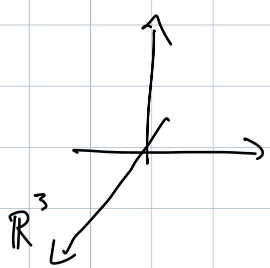
$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}_{\le d}[x]) = d+1$.

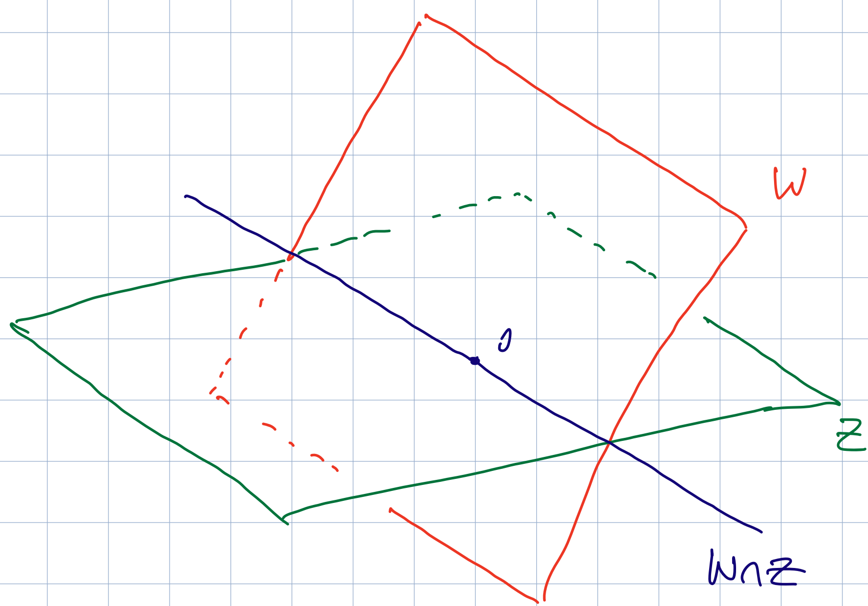
o

$W, Z \subset V$ sottospazi vettoriali.

<u>Oss</u>: $W \cap Z$ è un sottosp.







Pensare a: $W \cup Z$ è sottosp?