ISTITUZIONI DI MATEMATICA I 21/02/2024

Programma di oggi:

(I) integrazione di funzioni razionali (continuazione)

(II) integrazione per parti

(III) integrazione per sostituzione.

(I) INTEG. DI FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } P, Q \text{ polinomi}$$

Oss. A meno di effettuare una divisione tra polinomi, possiamo ricondurci al caso in cui il grado di P sia inferiore al grado di Q:

$$\frac{P}{Q} = N + \frac{R}{Q}, \text{ con } N, R \text{ polinomi} \Rightarrow \int N \text{ è "facile", ci rimane } \int \frac{R}{Q}.$$

ES.
$$\int \frac{\overset{P}{x^3+3}}{\underset{Q}{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x \cdot \cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} + \frac{(3-x)}{x^2+1} = \int \underset{N}{x} + \int \frac{\overset{R}{3-x}}{\underset{Q}{x^2+1}} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{3-x}{x^2+1}$$

Con divisione tra polinomi (o "a occhio")

Caso Q di grado 1, P di grado 0

Il prototipo è $\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.}$

Caso generale: $\int \frac{c}{ax+b}\, dx = \frac{c}{a} \ln|ax+b| + C.$

Caso Q di grado 2, P di grado ≤ 1

la formula risolutiva dipende da quante / come sono le radici di $Q(x)$.

Ricordiamo che, posto Δ il discriminante di $Q(x)$, si ha

$\Delta > 0 \iff$ Q ha 2 radici reali distinte

$\Delta = 0 \iff$ ——— coincidenti

$\Delta < 0 \iff$ ——— complesse (coniugate)

se $\Delta > 0$: possiamo fattorizzare $Q(x) = (cx+d)(ex+f)$

$\rightarrow$ formula risolutiva :

$\exists\, A, B \in \mathbb{R}$ (da determinare) tali che

$$\frac{ax+b}{Q(x)} = \frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$$

Da cui

$$\int \frac{P}{Q} = \int \frac{A}{cx+d} + \int \frac{B}{ex+f}$$

li sappiamo calcolare: sono gli ln

$\int \frac{\text{grado } 0}{\text{grado } 1}$

ES. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

$\Rightarrow \quad 1 = A(x-2) + B(x-1) \quad \Rightarrow \quad 1 = (A+B)x + (-2A-B)$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ -2A+A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

$\displaystyle\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$

$= -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c.$

Osservazioni:

- Cosa significa imporre $1 = A(x-2) + B(x-1)$?

Si tratta di una uguaglianza tra polinomi, che deve valere $\forall x$, puntualmente.

Quindi i coefficienti della x devono essere uguali (a sinistra si ha 0, a destra $A+B$), così come il termine costante (a sinistra si ha 1 mentre a destra si ha $-2A-B$).

- Quindi l'uguaglianza, che è <u>UNA</u>, "nasconde" <u>DUE</u> condizioni.

$\rightsquigarrow$ sistema di 2 equazioni in 2 incognite.

- Un altro modo di interpretare l'uguaglianza è tra rette: imponiamo che le rette $y = 1$ e $y = (A+B)x + (-2A-B)$ siano uguali. $\Rightarrow$ il coeff. angolare $A+B$ deve essere 0 e il termine $-2A-B$ deve essere 1.

5 - 21.02

Se $\Delta = 0$: il prototipo, quando P è una costante, è

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C}$$

In generale, P è di grado ($\leq$) 1 e Q è più complicato.

Scriviamo $P(x) = ax+b$; $Q(x) = (cx+d)^2$.

$\rightarrow$ formula risolutiva: $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$ (da trovare) tali che

$$\frac{P}{Q} = \frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{(cx+d)^2}.$$

Da cui

$$\int \frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \int \frac{A}{cx+d} + \int \frac{B}{(cx+d)^2}$$

lo sappiamo fare: è un ln

lo sappiamo fare perché "assomiglia" a $\int \frac{1}{x^2}$.

$$\int \frac{1}{(cx+d)^2}\,dx = -\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{cx+d} + \text{cost}$$

ES. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\displaystyle\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow \quad x = A(x+1) + B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x+1} + \text{cost.}$$

$\Delta < 0$: il prototipo, quando P è costante, è

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C}$$

In generale, P ha grado $(\leq)1$ e Q è più complicato.

Scriviamo $P(x) = ax+b$, $Q(x) = (cx+d)^2 + e^2$

7- 21.02

→ formula risolutiva: $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ (da trovare) tali che

$$\frac{P}{Q} = \frac{ax+b}{(cx+d)^2+e^2} = \frac{A\,(cx+d)}{(cx+d)^2+e^2} + \frac{B}{(cx+d)^2+e^2}$$

Da cui

$$\int \frac{ax+b}{(cx+d)^2+e^2}\,dx = \int \frac{A\,(cx+d)}{(cx+d)^2+e^2}\,dx + \int \frac{B}{(cx+d)^2+e^2}\,dx$$

lo sappiamo calcolare: e' un logaritmo.

Assomiglia a

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

lo sappiamo calcolare: e' un arcotangente (opportunamente modificato).

Assomiglia a

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$$

Es $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+4}\,dx = ?$

1. Controllo il grado:

grado (numeratore) = 1 < grado (denominatore) = 2
$\Rightarrow$ non serve fare semplificazioni.

2. Controllo le radici del denominatore: $\Delta < 0 \Rightarrow$ radici complesse.

3. Riscrivo il denominatore come $(c(x+d)^2+e^2$

$$x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 = (x+1)^2+\underbrace{(\sqrt{3})^2}$$

4. Usiamo la formula risolutiva:

poi vedremo dove questo entra in gioco

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2+3} = \frac{A(x+1)}{(x+1)^2+3} + \frac{B}{(x+1)^2+3} \Rightarrow (\ldots) \Rightarrow A=2,\ B=1$$

5. Integriamo:

$$\int \frac{2x+3}{(x+1)^2+3}\,dx = \overbrace{\int \frac{2\,(x+1)}{(x+1)^2+3}\,dx}^{(\mathrm{I})} + \overbrace{\int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx}^{(\mathrm{II})}$$

$$(I) = \ln|(x+1)^2+3| = \ln(x^2+2x+4)$$

(II) Osserviamo che $$\frac{d}{dx}\left(\arctan(f(x))\right) = \frac{1}{f^2(x)+1} \cdot f'(x)$$

Mentre nel nostro integrando abbiamo $\frac{1}{(\dots)^2+3}$. Per "eliminare" il 3 e far comparire un 1, fattorizziamo il 3:

$$(II) = \int \frac{1}{3\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3} + \text{cost.}$$

$$\int \frac{1}{(\alpha x)^2+1} = \frac{\arctan(\alpha x)}{\alpha} + \text{cost.}$$

6. Conclusione:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+4}\, dx = \ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

10 21.02

II INTEGRAZIONE PER PARTI

Si basa su: $(\bullet)\ \int f' = f$

$(\bullet\bullet)\ (fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(\bullet) \Rightarrow \int (f \cdot g)' = f g$

$(\bullet\bullet) \Rightarrow \int (f \cdot g)' = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'$

$$\Rightarrow \boxed{\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g}$$

Come integrale definito, ricordando che

se $H = \int h$ è una primitiva di h

allora $\int_a^b h(x)\,dx = H(b) - H(a) = [H|_a^b$,

si ha

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = [f(b) \cdot g(b) - f(a) g(a)] - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx}$$

ES. $\int x \cdot \cos x \, dx$ (e analogamente $\int x^m \cdot \cos x$) iterando il procedimento

$\underset{f}{x}$ $\underset{g'}{\cos x}$

scegliamo $f(x)=x$ perché $f'(x)=1$.

Usando la formula di integrazione per parti, con $f(x)=x$ e $g'(x)=\cos x$

$\Rightarrow$ $f'(x)=1$ e $g(x)=\sin x$, si ha

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'} \, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

ES. $$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \Big[x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

$$= (\pi/2 - 0) + \Big[\cos x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \pi/2 + 0 - \cos(0) = \pi/2 - 1.$$

Es. $\int x^2 \cdot e^x \, dx = ?$ attenzione a chi si sceglie come $f(x)$:

Se prendiamo $\begin{cases} f(x) = e^x & \Rightarrow f'(x) = e^x \\ g'(x) = x^2 & \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$ (ad esempio)

$$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = \frac{x^3}{3} e^x - \underbrace{\int \frac{x^3}{3} e^x dx}$$ non lo sappiamo fare.

Se prendiamo (invece) $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x \\ g(x) = e^x \end{cases}$ (ad esempio)

$$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x dx}$$

non lo so fare... però ho diminuito il grado della x

Integrando nuovamente per parti,

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = x e^x - \underbrace{\int e^x dx} = x e^x - e^x + \text{cost}.$$ ora lo so fare!

Conclusione:

$$\int x^2 e^x dx = e^x \left[x^2 - 2x + 2 \right] + \text{cost}.$$

13_21.02

ES. (trucco!)

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x$$

$1 = \frac{d}{dx}(x)$

integro per parti con $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 = x \cdot \ln x - x + \text{cost}.$$

ES

$$\int \underbrace{\sin x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx = \sin^2(x) - \int \cos x \sin x \, dx$$

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$ (ad esempio)

$$\Rightarrow 2 \int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x + \text{cost}.$$

$$\Rightarrow \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c.$$

14-21.02

III INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE (CAMBIO DI VARIAB.)

Si basa sulla regola

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La applichiamo ad una particolare composizione:

$F(g(x))$ dove F è una primitiva di f.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Formula sopra

$F' = f$ per definizione di primitiva

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{F(g(x)) = \int f(g) \cdot g' \, dx}$$

ES $\int y^{100}\, dy = \frac{y^{101}}{101} + c$ $f(y)=y^{100} \Rightarrow F = \int f = \frac{y^{101}}{101} + c$

ora,

$$\int (\sin x)^{100} \cdot \cos x\, dx = \int f(\sin x) \cdot (\sin x)'\, dx = F(\sin x) = \frac{(\sin x)^{101}}{101} + c$$

si può anche vedere come:

$$\int (\sin x)^{100} \cdot \cos x\, dx = \int (g(x))^{100} \cdot g'(x)\, dx = \frac{g(x)^{101}}{101} + c = \frac{(\sin x)^{101}}{101} + c$$

ES $\int 2x e^{x^2}\, dx = \int e^{\star} \cdot (\star)'\, dx = e^{\star} + \text{cost.}$

qui $f(y) = e^y$ $F = \int f = e^y$

$g(x) = x^2$

$$\int 2x e^{x^2}\, dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) = e^{x^2} + \text{cost.}$$

16_21.02

Notazione / cambio di variabile (riprendiamo domani)

$$\begin{cases} y = g(x) \\ dy = g'(x)\,dx \end{cases}$$

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y) = F(g(x)).$$