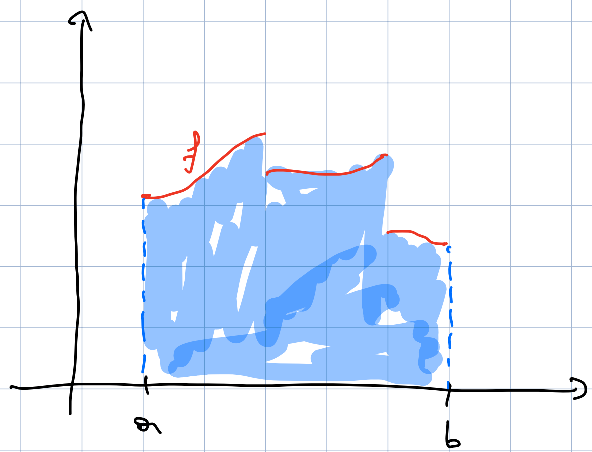
Ist. Mat. I - C1A
14/2/24

Integrazione

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$



Calcolare area

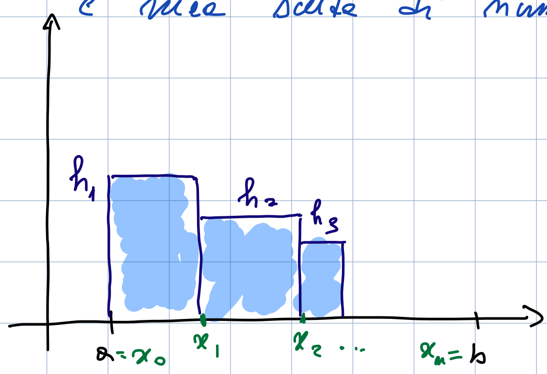
$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \ 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

Idea: area nota per i rettangoli. Uso approssimazione.

Def: chiamo plurirettangolo P di base $[a,b]$ una suddivisione di $[a,b]$ tramite punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

e una scelta di numeri $h_i \geq 0$ $i = 1 \dots n$.

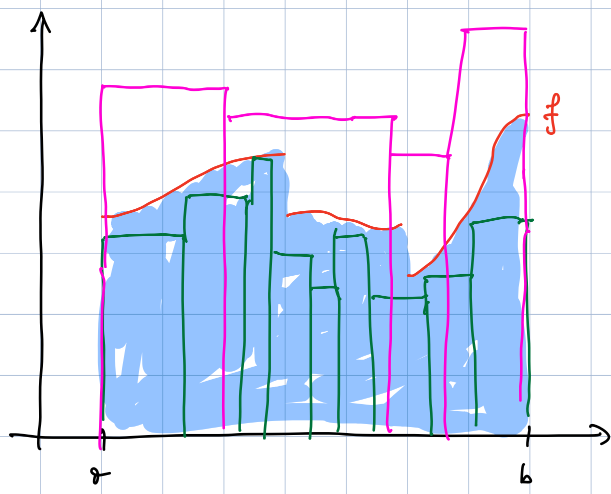


Chiamo area di P

$$A(P) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Dico che $P \leq f$ se

$h_i \leq f(x)$ $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$



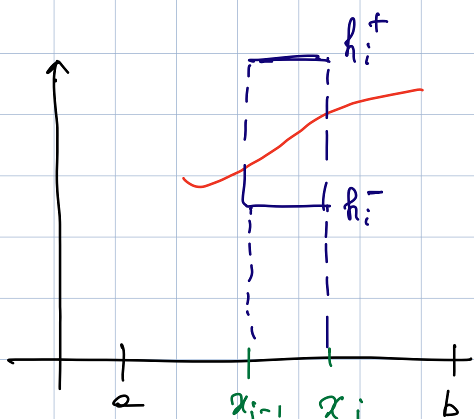
Dico che $f \le P$ se
$f(x) \le h_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

$P \le f$

$f \le P$

Lemma: se $P_- \le f \le P_+$ allora
$A(P_-) \le A(P_+)$.

Dim.: se P_- e P_+ sono ottenuti dalla stessa suddivisione $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
ho P_- ha altezze h_i^- e P_+ altezze h_i^+ su $[x_{i-1}, x_i]$
e $h_- \le h_+$

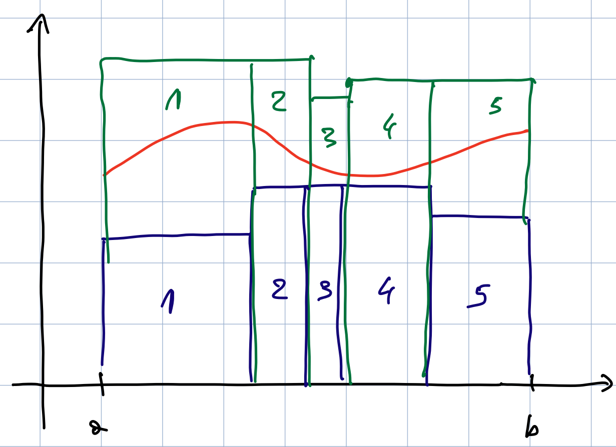


$$A(P_-) = \sum_{i=1}^{n} h_i^- \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$A(P_+) = \sum_{i=1}^{n} h_i^+ (x_i - x_{i-1})$$

Se non sono ottenuti dalla stessa posso sostituirli con P_-' e P_+' aventi la stessa suddivisione e con $A(P_-') = A(P_-)$

$A(P_+^{\sim}) = A(P_+)$



$\square$

<u>Oss</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, $f \geq 0$

Posso scegliere come P_- $[a,b]$ con $h = 0$
e ho $P_- \leq f$

Posso scegliere come P_+ $[a,b]$ con $h = m$ maggiorante per f
e ho $f \leq P_+$

Def: pongo
$$I_-(f) = \sup \{ A(P_-) : P_- \leq f \}$$
$$I_+(f) = \inf \{ A(P_+) : f \leq P_+ \}$$

Dico che f è integrabile su $[a,b]$ se $I_-(f) = I_+(f)$; in tal caso chiamo questo valore integrale di f su $[a,b]$, indicato
$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Non esiste sempre!

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}\ ,\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Se P_- dato da $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ e altezze $h_1,\ldots,h_n$ è $P_-\leq f$ ho $\forall x\in[x_{i-1},x_i]$ ho $h_i\leq f(x)$; poiché $[x_{i-1},x_i]$ contiene degli x razionali ho $h_i=0$.

$\Rightarrow \mathcal{A}(P_-)=0$

Se P_+ .... è $f\leq P_+$ ho $\forall x\in[x_{i-1},x_i]$ $f(x)\leq h_i$; ma $[x_{i-1},x_i]$ contiene degli $x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow h_i\geq 1$

$\Rightarrow \mathcal{A}(P_+)\geq 1.$

$I_-(f)=0\ ,\quad I_+(f)=1$

$\Rightarrow \nexists \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx.$

Perché il simbolo:

qualsiasi punto di $[x_{i-1},x_i]$

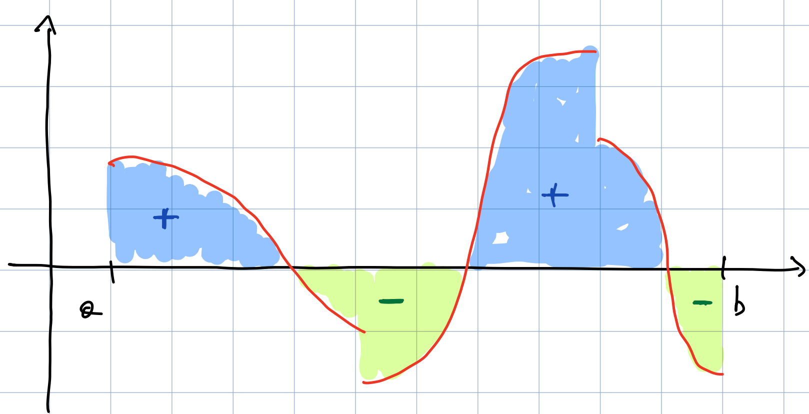
$$\underbrace{\sum_{i=1}^n h_i^-\cdot(x_i-x_{i-1})}_{\int_a^b f(x)dx}\leq\underbrace{\sum_{i=1}^n}_{\int_a^b}\underbrace{f(\xi_i)}_{f(x)}\cdot\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{dx}\leq\underbrace{\sum_{i=1}^n h_i^+\cdot(x_i-x_{i-1})}_{\int_a^b f(x)dx}$$

- Quali funzioni sono integrabili?
- Come si calcola l'integrale?

<u>Oss</u>: f integrabile $\iff I_-(f) = I_+(f)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\pm$ con $P_- \leq f \leq P_+$ e $A(P_+) - A(P_-) < \varepsilon$.

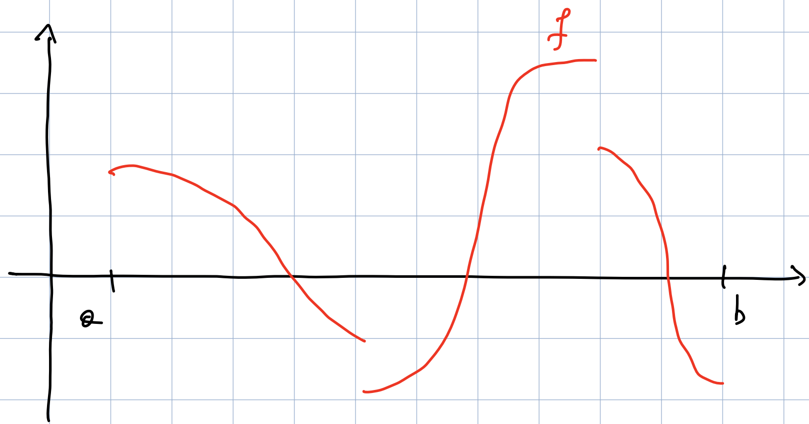
Per una f di segno qualsiasi (limitata) definisco l'integrale dando peso negativo alle aree sotto l'asse delle ascisse:

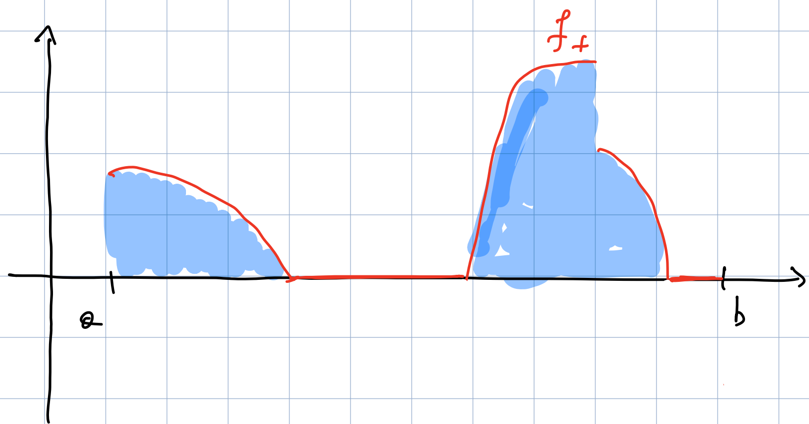


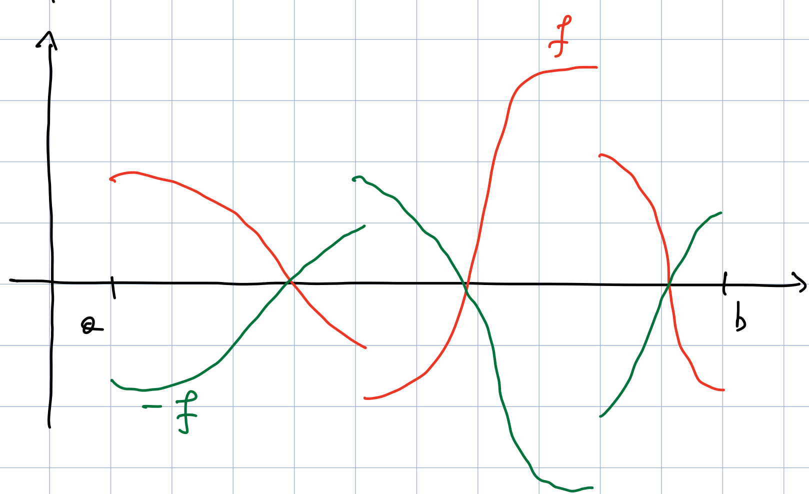
Pongo $f_+ = \max\{f, 0\}$ $\quad f_- = \max\{-f, 0\}$

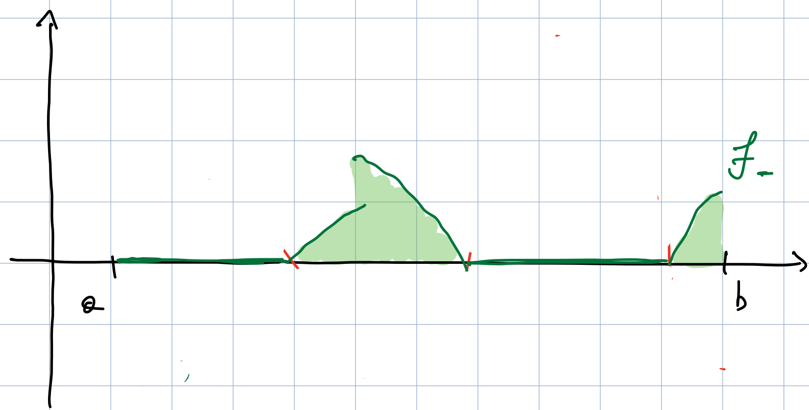
ho $f_\pm \geq 0$; dico che f è integrabile se lo sono $f_\pm$ e pongo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$$


f
a
b


f_+
a
b


f
a
b
−f



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx$$

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ continua se

dipende da x

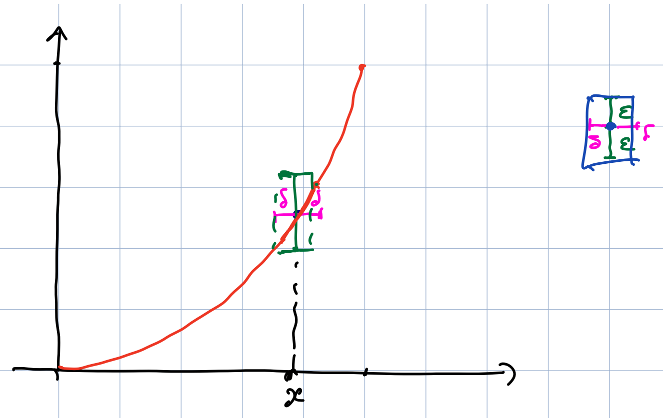
$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ se $|y - x| < \delta$

$f: I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ se $|y - x| < \delta$

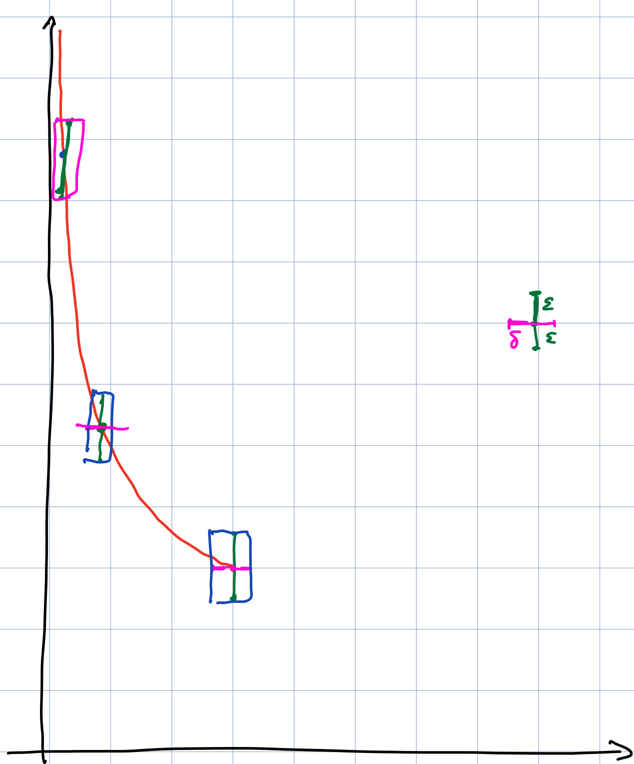
indip. da x

<u>Es</u>: $f(x) = x^2$ su $[0,1]$



unif. continua

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ su $(0,1]$



Non riesco a scegliere lo stesso δ per ogni ε

Fatti:

1. f continua su $[a,b]$ chiuso e lim $\Longrightarrow$ unif. continua
2. f unif. continua ≥ 0 su $[a,b]$ $\Longrightarrow$ integrabile
3. f continua $\Longrightarrow$ $f_{\pm}$ continue

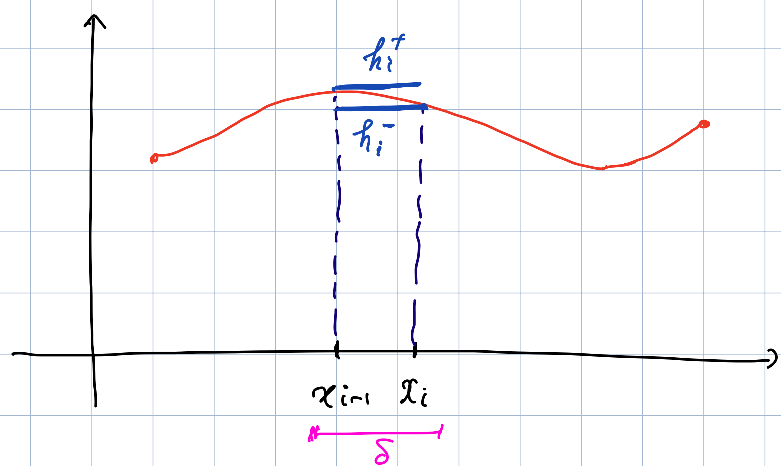
$\Longrightarrow$ f continua è integrabile

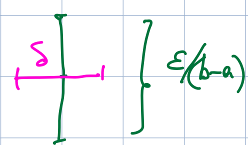
② Prendo $f \geq 0$ unif. continua in $[a,b]$. Dato $\varepsilon > 0$
Cerco $P_\pm$ t.c. $P_- \leq f \leq P_+$ e
$A(P_+) - A(P_-) < \varepsilon$.

So che esiste $\delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
purché $|x-y| < \delta$.

Prendo una suddivisione $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
t.c. $x_i - x_{i-1} < \delta$ $\forall i$. So che
$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$

Pongo $h_i^- = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$h_i^+ = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$





Fatto
$h_i^+ - h_i^- < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$A(P_+) - A(P_-) = \sum_{i=1}^{n} h_i^+ \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$- \sum_{i=1}^{m} h_i^- \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (h_i^+ - h_i^-) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})}_{b-a}$$

$$= \varepsilon$$

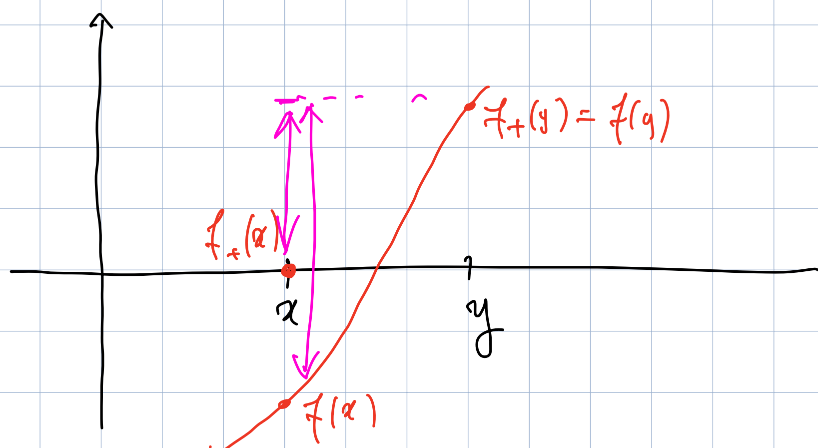
$\blacksquare$

③ f continua $\Longrightarrow$ $f_\pm$ continue

Infatti $\quad |f_\pm(x) - f_\pm(y)| \leq |f(x) - f(y)|$

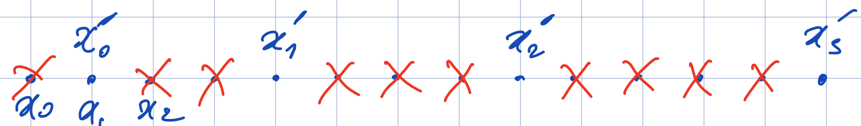
Se $f(x)$ e $f(y)$ sono concordi vale $=$

Se $\quad f(x) < 0 < f(y)$



(1) continue su chiuso e limitato $\Longrightarrow$ continua.

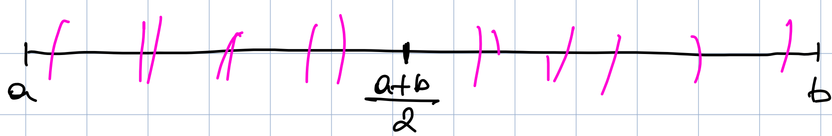
<u>Def</u>: data una successione $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ chiamo successione <u>estratta</u> da lei una ottenuta cancellando alcuni termini (ma mantenendone infiniti)



Cioè $\quad x'_n = x_{k(n)} \qquad k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente

<u>Prop</u>: se $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ è una successione in $[a,b]$ allora ha una estratta convergente.

"Dimo"



Almeno una delle due metà contiene ∞ pti della successione: tengo lei.

Dimezzo ancora: una delle due metà ne contiene ancora ∞: tengo lei.

Iterando estraggo una successione che converge all'unico punto che è l'intersezione di tutte le metà. ∎

Prop: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ unif. continua.

Dim: unif. cont.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $|x-y| < \delta$ ho $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Per assurdo: $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$ esistono x, y con $|x-y| < \delta$ ma $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Lo applico con $\delta = 2^{-n}$: $\exists\, x_n, y_n$ con

$$|x_n - y_n| < 2^{-n} \quad \text{ma} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Posso estrarre da (x_n) una $(x_{k(n)})$ convergente a un certo z. Ho:

$$\underbrace{\Big| \underset{\substack{\downarrow \\ z}}{x_{k(n)}} - y_{k(n)} \Big| < \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{2^{-k(n)}}}_{\Downarrow} \qquad\qquad \Big| \underbrace{f\big(\underset{\substack{\downarrow \\ z}}{x_{k(n)}}\big)}_{\substack{\downarrow \\ f(z)}} - \underbrace{f\big(\underset{\substack{\downarrow \\ z}}{y_{k(n)}}\big)}_{\substack{\downarrow \\ f(z)}} \Big| > \varepsilon$$

$$y_{k(n)} \to z \qquad\qquad \text{Assurdo.} \quad \blacksquare$$