Ist. Mat. I - CIA
10/11/23

$$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1 \qquad \log(1+x) = x + o(x)$$

$$\frac{\log(1+x)-x}{x^2} \rightsquigarrow \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{2x} \to -\frac{1}{2}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{\log(1+x)-(x-\frac{1}{2}x^2)}{x^3} \rightsquigarrow \frac{\frac{1}{1+x}-(1-x)}{3x^2} = \frac{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{x}+x^2}{1+x}}{3x^2} \to \frac{1}{3}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + o(x^n) \quad \text{in } 0$$

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I \quad$ derivabile n volte su I

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Es: $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

$f''(x) = 2 \cdot \sin(x) + 4x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$

$f'''(x) = 2 \cdot \cos(x) + 4 \cdot \cos(x) - 4x \cdot \sin(x)$
$- 2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 6$

$$P_3(x) = 0 \cdot \frac{x^0}{0!} + 0 \cdot \frac{x^1}{1!} + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + 6 \cdot \frac{x^3}{3!} = x^3$$

Prop: $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, \dots, n$

Dim: $$D^{(h)} P_n(x)\Big|_{x=x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \underbrace{D^{(h)}\left((x-x_0)^k\right)\Big|_{x=x_0}}_{\begin{cases} k! & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}}$$

resto

Teo: $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$

$P_n(x)$ n-esimo polinomio di Taylor di f in x_0

Teo: approssimazione di Taylor di ordine n con resto di Peano
o sviluppo

Dim.: in x_0: $\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\cdots$$

$$\frac{f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x)}{n!} \qquad \frac{0}{n!}=0$$

$\boxtimes$

Quelli visti: $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

+ cos + log + exp... sono gli sviluppi di Taylor in $x_0=0$.

Es: $f(x)=(1+x)^\alpha$ in $x=0$ con $\alpha\in\mathbb{R}$

$f(0)=1$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\qquad f'(0)=\alpha$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\qquad f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac12\cdot(\frac12-1)}{2!}x^2+\frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)}{3!}x^3+\dots$$

$$=1+\frac12 x-\frac18 x^2+\frac{1}{16}x^3+\dots$$

Teo: (Taylor con resto di Lagrange)

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$ $\quad$ derivabile $n+1$ volte

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

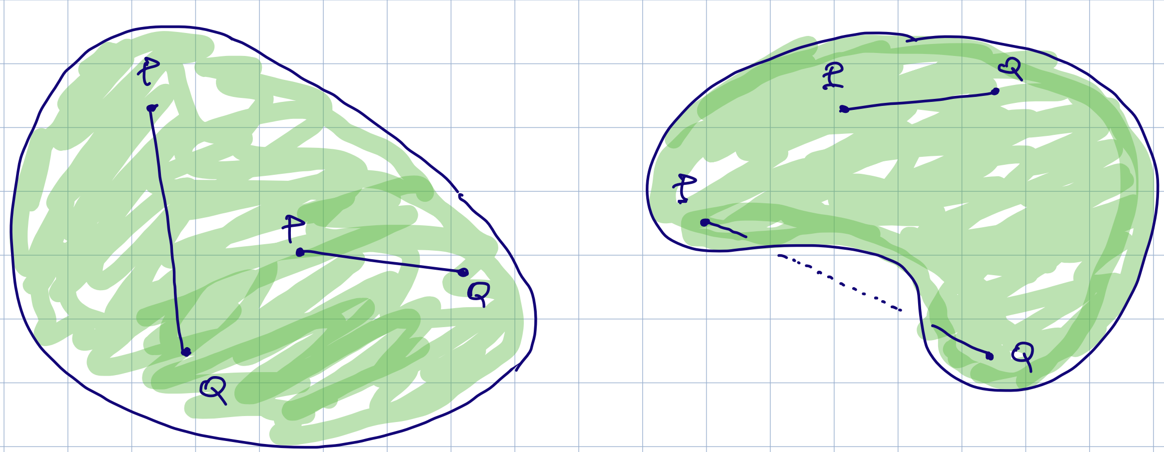
dove c è compreso tra x_0 e x.

Oss: $n=0$ $\quad f(x) = f(x_0) + f'(c)\cdot(x-x_0)$

cioè $\quad f'(c) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\qquad$ (Cauchy)

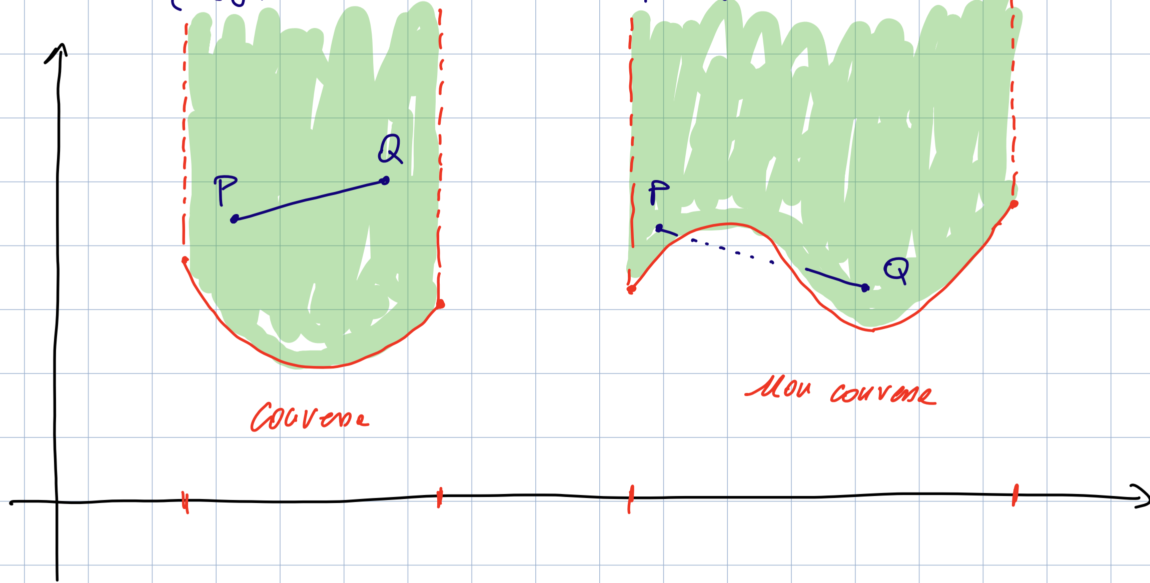
———— o ————

Def: $A \subset \mathbb{R}^2$ è convesso se $\forall P, Q \in A$ il segmento che unisce P e Q è contenuto in A.

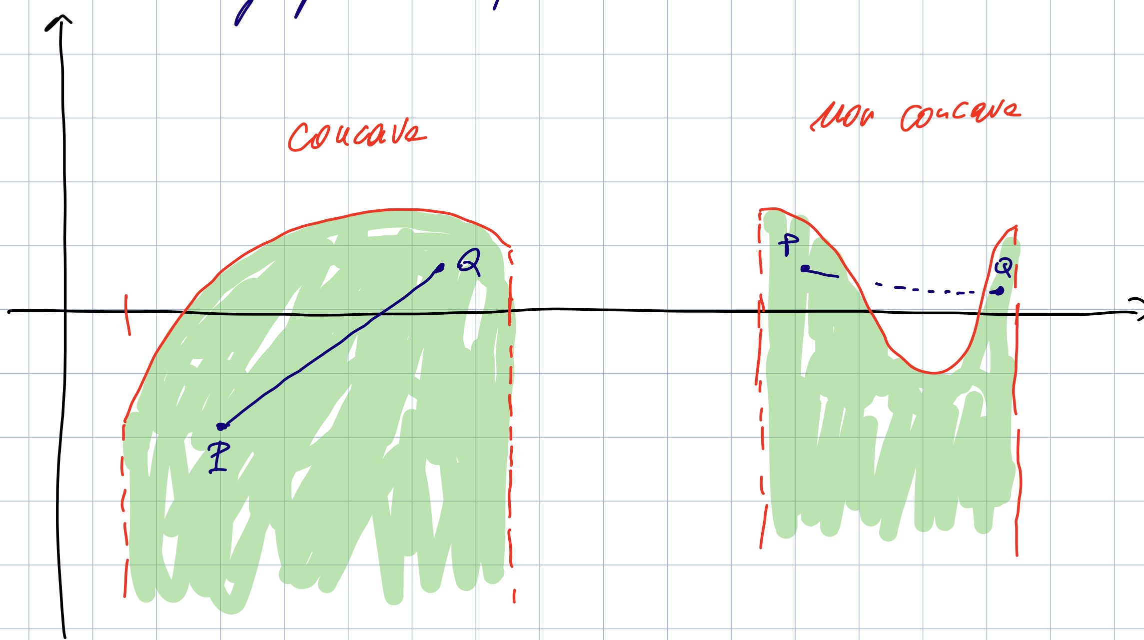


Def: data $f: I \to \mathbb{R}$ dico che f è convessa se è convesso il suo sopragrafico

$$\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x \in I,\ y \geq f(x) \right\}$$



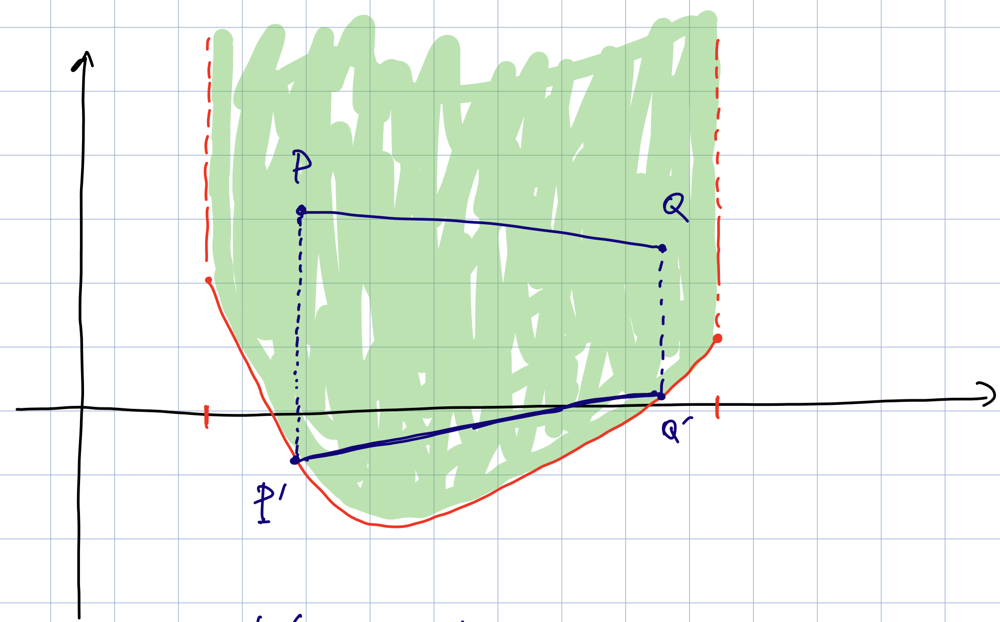
Dico che f è concava se $-f$ è convessa, cioè se il sottografico di f è convesso.



Prop: f convessa $\Longleftrightarrow$ ogni segmento con estremi sul grafico di f è contenuto nel sopragrafico di f.

Dimo: $\Longrightarrow$ ovvia (poiché il grafico è contenuto nel sopragrafico)

$\Longleftarrow$



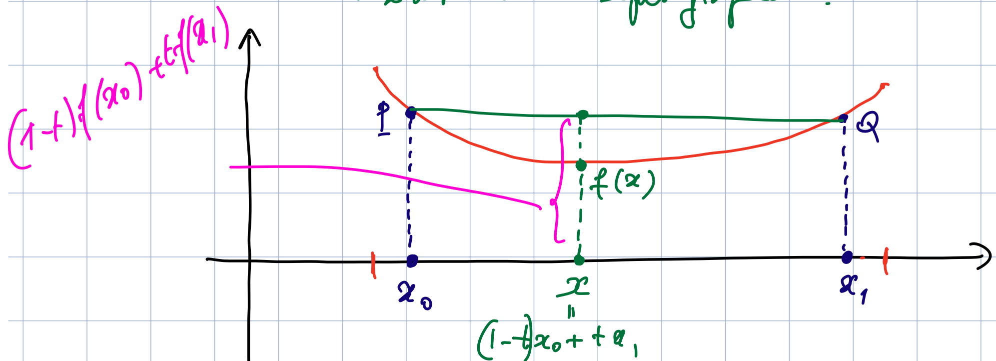
$P'Q' \subset$ sopragrafico $\Longrightarrow$ $PQ \subset$ sopragrafico. $\square$

Prop: $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$ e $t \in [0,1]$

si ha $\boxed{f((1-t)x_0 + t x_1) \leq (1-t) f(x_0) + t \cdot f(x_1)}$

Dimo: provo che la seconda condizione equivale a "ogni segmento con estremi sul grafico è contenuto nel sopragrafico".



Quest'ultima significa: $\forall x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$
e x compreso tra x_0 e x_1, si ha

$f(x) \leq$ ordinata del punto di ascissa x sul segmento di estremi $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$

x tra x_0 e x_1 significa
$x = (1-t)\,x_0 + t \cdot x_1$ con $t \in [0,1]$

ordinata del punto di ascissa x sul segmento è
$(1-t)\,f(x_0) + t \cdot f(x_1)$ $\blacksquare$

——— o ———

Foglio 4; ex 2: trovare dominio e asintoti di f.

(a) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x^2(x-3)}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$.

$$\lim_{x \to 3^\pm} f(x) = \frac{6}{9 \cdot 0^\pm} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x^2 \cdot (x-3)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x(x-3)} = \frac{2}{0^+ \cdot (-3)} = -\infty$$

Oss: $f(x) \equiv 0$ per $x < 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

(b) $f(x) = 2x - 7 + \frac{4}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad (-2, +\infty)$

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -11 + \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = 2x - 7 + \underbrace{o(1)}_{\text{tende a } 0} \qquad \text{in } +\infty$$

$y = 2x - 7$ asintoto obliquo.

(c) $2x^2 \cdot \log|x|$ $\qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad$ pari

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0^-$$

(f) $f(x) = x \cdot \frac{2 - e^x}{5 + 3 \cdot e^x}$ $\qquad \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{3} \overset{?}{=} m_+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot \frac{2}{5} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{5} \overset{?}{=} m_-$$

$$q_+ = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\frac{2 - e^x}{5 + 3e^x} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{6-\cancel{3e^x}+5+\cancel{3e^x}}{3(5+3e^x)}\right) = 0$$

$$q_- = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{2}{5}x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\left(\frac{2-e^x}{5+3e^x}-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{\cancel{10}-5e^x-\cancel{10}-6e^x}{5(5+3e^x)} = 0$$

(1) $$f(x) = \frac{2x^2-\sqrt[3]{x-1}+\sin(x)}{\sqrt{2}\cdot x^2+4\sqrt{2-x}-1}$$

Necessario: $x \le 2$

$$\underbrace{\sqrt{2}\,x^2}_{\ge 0}+\underbrace{4\sqrt{2-x}}_{\ge 0}-1 \neq 0$$

Oss: se $|x|\ge 1$ $\quad \sqrt{2}\,x^2 \ge \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$ ok

se $|x|\le 1$ $\quad 4\sqrt{2-x} \ge 4 > 1 \Rightarrow$ ok

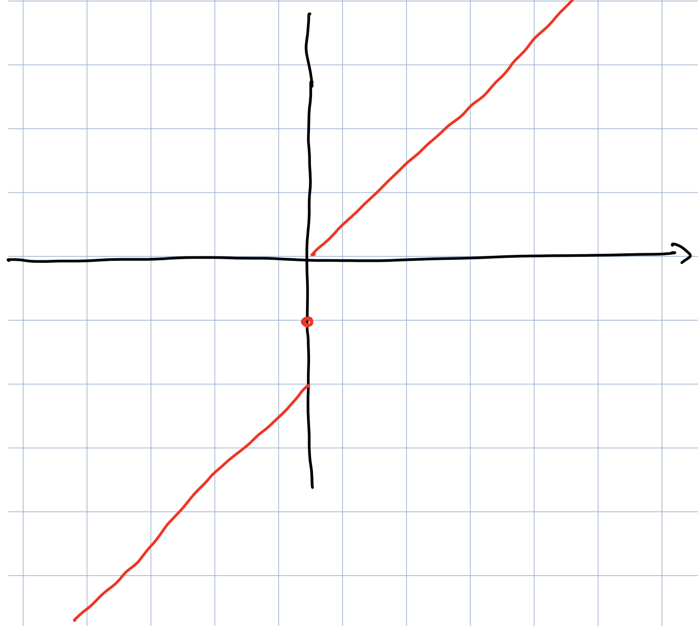
Dominio $(-\infty, 2]$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{8-1+\sin(2)}{4\sqrt{2}-1}.$$

$\boxed{4}$ Trovare dominio, punti continuità e punti di estensione continua

(b) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) + x - 1$

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
non ha limite in 0
$\Rightarrow$ non si può ridefinire continua cambiando valore in 0

(c) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \sin(x^2)$ $\qquad \mathbb{R}$

continua in ogni $x \neq 0$.

$f(0) = 0 \cdot \sin(0) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\Rightarrow f$ continua in 0.

(e) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$$\frac{x^3 + 1 + 2x(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x+1)}(x-2)}$$

$$\lim_{x\to(-2)^\pm} f(x) = \frac{4-2+1}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1-1+1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

Si può estendere con continuità in -1 con valore $-1/3$.

(g) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\log(1+x^2)}$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$ non si estende

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\log(1+x^2)} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ci provo: se quello nuovo esiste ho calcolato il vecchio; se no devo approssimare meglio.

Foglio 5. Es 1. Dire se f soddisfa ipotesi di $\underbrace{\text{Weierstrass}}_{f \text{ continua su } [a,b]}$ o $\underbrace{\text{di esistenza zeri}}_{f \text{ continua su } [a,b] \text{ e } f(a)\cdot f(b) \le 0.}$

(a) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log(1+x) + \sqrt{x} - \cos(x)$

Weierstrass : sì

$f(0) = 0 + 0 - \cos(0) = -1$

$f(1) = \log(2) + 1 - \cos(1) > 0$ $\quad$ sì $\exists$ zeri

(b) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arctan(\log(x))$

no/no $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$\exists\, a, b$ t.c. $f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists$ zeri

(unico poiché arctan e log sono crescenti $\Rightarrow f$ crescente)

(c) $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 \cdot \log(3+\cos(x))$

Weierstrass: sì.

$f(-\pi) = -\pi^3 \cdot \log(2) < 0$

$f(\pi) = \pi^3 \cdot \log(2) > 0$ $\quad$ sì $\exists$ zeri.