Risoluzione di alcuni esercizi teorici lasciati

Dimostrare la formula per $D(f/g)$ seguendo quelle per $D(f\cdot g)$ e $D(1/f)$.

$$D(f/g) = D(f\cdot 1/g) = D(f)\cdot 1/g + f\cdot D(1/g)$$

$$= f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}.$$

Dimostrare la formula per $D(x^n)$ usando i binomiali.

$$D(x^n) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot h^k - x^n\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\cancel{x^n} + nx^{n-1}\cdot h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot h^k \cancel{- x^n}\right)$$

$$= nx^{n-1} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k$$

$$= nx^{n-1} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h^2\cdot\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n}{\ell+2}x^{n-\ell-2}\cdot h^\ell$$

$$= nx^{n-1} + \lim_{h\to 0} h\cdot\underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n}{\ell+2}x^{n-\ell-2}\cdot h^\ell\right)}$$

per $|h|\leq 1$ il valore assoluto di questo è $\leq \sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n}{\ell+2}|x|^{n-\ell-2}$

che è indip. da h

dunque questo fa 0

Calcolare $D(\cos)$ sapendo $D(\sin)$

$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Longrightarrow D(\cos(x)) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin(x)$.

Data $f : I \to \mathbb{R}$ monotona e $c \in \bar{I}$ provare che esistono $\lim_{x \to c^\pm} f(x)$.

Suppongo f crescente e provo che

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < c\}.$$

Gli altri casi sono analoghi. Sia s tale sup.

Se $s < +\infty$ ho $f(x) \le s$ $\forall x \in I, x < c$.
Inoltre $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y$ t.c. $y \in I, y < c, f(y) > s - \varepsilon$.
Per $y < x < c$ ho allora
$s - \varepsilon < f(y) < f(x) < s < s + \varepsilon$
dunque posto $\delta = c - y$ si ha $|f(x) - s| < \varepsilon$
$\forall x \in I,\ |x - c| < \delta,\ x < c$.

Dimostrare la formula di de l'Hôpital per $x_0 = \pm\infty$ e/o per $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ che sono $\pm\infty$

La formula dice: date $f, g: I \to \mathbb{R}$ derivabili e $x_0 \in \overline{I}$ tali che

- $g(x), g'(x)$ $\forall x \in I, x \neq x_0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Faccio il caso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ uguali a $\pm\infty$, e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Faccio dapprima $L \in \mathbb{R}$. Per def $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.
$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$ se $x \in I$, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

Fisso per un attimo z con $z \in I$, $|z - z_0| < \delta$, $z \neq x_0$.
Preso y tra x_0 e z qualsiasi ho intanto $g(y) \neq g(z)$ (altrimenti esisterebbe w tra y e z con $g'(w) = 0$). Inoltre applicando Cauchy sull'intervallo di estremi y e z trovo

$$\frac{f(y) - f(z)}{g(y) - g(z)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$$ w compreso tra y e z
$\Rightarrow |w - x_0| < \delta$, $w \neq x_0$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(y) - f(z)}{g(y) - g(z)} - L\right| < \varepsilon$$. Inoltre posso scrivere

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f(y)-f(z)}{g(y)-g(z)} \cdot \frac{f(y)}{f(y)-f(z)} \cdot \frac{g(y)-g(z)}{g(y)}$$

dunque

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(y)-f(z)}{g(y)-g(z)} \right| =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\left| \frac{f(y)-f(z)}{g(y)-g(z)} \right|}_{< L+\varepsilon} \cdot \underbrace{\left| \underbrace{\frac{f(y)}{f(y)-f(z)}}_{\xrightarrow{y \to x_0} 1} \cdot \underbrace{\frac{g(y)-g(z)}{g(y)}}_{\xrightarrow{y \to x_0} 1} - 1 \right|}_{\to 0}}_{\to 0}$$

poiché $\lim_{x_0} f = \pm\infty$

poiché $\lim_{x_0} g = \pm\infty$

dunque è minore di ε per y abbastanza vicino a x_0, e allora

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - L \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(y)-f(z)}{g(y)-g(z)} \right| + \left| \frac{f(y)-f(z)}{g(y)-g(z)} - L \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.

Faccio ora $L = +\infty$ (se è $-\infty$ è simile).

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\frac{f'(x)}{g'(x)} > M \quad \forall x$ t.c. $|x - x_0| < \delta$

Fisso z con $|z - x_0| < \delta$ e prendo y tra x_0 e z. Allora per Lagrange

$$\frac{f(y) - f(z)}{g(y) - g(z)} = \frac{f'(w)}{g'(w)} \quad \text{con } w \text{ tra } y \text{ e } z$$

$$\Rightarrow \frac{f(y) - f(z)}{g(y) - g(z)} > M .$$

Noto anche che se z è abbastanza vicino a x_0 ho che $f(y)$ ha il segno di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\forall y$ tra x_0 e z e $g(y)$ ha il segno di $\lim_{x \to x_0} g(x)$ $\forall y$ tra x_0 e z.

Inoltre se y è abbastanza vicino a x_0 (fissato z) ho che $f(y) - f(z)$ ha il segno di $f(y)$ e $g(y) - g(z)$ ha il segno di $g(y)$. Siccome il loro rapporto è $> M > 0$ ho che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ sono uguali tra loro, e uguali a $\pm\infty$.

Se sono $+\infty$ ho

$f(y) > \frac{1}{2}\left(f(y) - f(z)\right)$ per y vicino a x_0

$g(z) > 0 \Rightarrow 0 < g(y) - g(z) < g(y)$

$$\Rightarrow \frac{f(y)}{g(y)} > \frac{1}{2} \; \frac{f(y)-f(z)}{g(y)-g(z)} > \frac{1}{2} M$$

dunque essendo M arbitrario ho $\lim_{y\to x_0} \frac{f(y)}{g(y)} = +\infty$.

Se scelgo $-\infty$ applico quanto visto a $\frac{-f}{-g}$; loro hanno limite $+\infty$ e

$$\frac{(-f)'}{(-g)'} = \frac{-f'}{-g'} = \frac{f'}{g'} \to +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{-f}{-g} \to +\infty \quad \text{ma} \quad \frac{-f}{-g} = \frac{f}{g}.$$

Infine se $x_0 = \pm\infty$ pongo

$$F(t) = f(1/t) \qquad G(t) = g(1/t).$$

$$\lim_{t\to 0^\pm} F(t) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

$$\lim_{t\to 0^\pm} G(t) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$$

dunque $\lim_{t\to 0^\pm} \frac{F(t)}{G(t)}$ è una forma indeterminata

$\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, e se esiste allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{è uguale a lei.}$$

Ma $\lim_{t\to 0^\pm} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{f'(1/t)\cdot(-1/t^2)}{g'(1/t)\cdot(-1/t^2)}$

$$= \lim_{t\to 0^\pm} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

da cui la conclusione.

Proviamo per induzione che

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$$

Per $n=0$ la prima, la seconda e la quarta sono ovvie, la terza segue dal limite $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$.
Dunque facciamo sempre solo il passo induttivo.
Usiamo sempre de l'Hôpital.

$\boxed{\text{EXP}}$ $$\frac{\left(e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\right)'}{(x^{n+1})'} = \frac{e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!}}{(n+1)\, x^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x^n} = o(1) \quad \text{per ipotesi induttiva.}$$

$\boxed{\text{COS/SIN}}$ Questi si fanno insieme.

C_n : la tesi sul coseno per un certo n

S_n : la tesi sul seno per un certo n.

Supponiamo C_0, S_0 vere. Ora

$$S_{m+1} \iff \sin(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = o(x^{2m+3})$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{\left(\sin(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right)'}{\left(x^{2m+3}\right)'} = o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1) x^{2k}}{(2m+3) x^{2m+2}} = o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = o\left(x^{2m+2}\right)$$

$$\|$$

$$C_{m+1}$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{\left(\cos(x) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right)'}{\left(x^{2m+2}\right)'} = o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-\sin(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2k)\cdot x^{2k-1}}{(2n+2)\, x^{2n+1}} = o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = o\left(x^{2n+1}\right)}_{S_n}$$

Riassumendo abbiamo visto

$$S_n \Rightarrow C_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} \qquad \forall n$$

dunque S_n è vera $\forall n$, ma allora lo è anche C_n.

$\boxed{\text{LOG}}$

$$\frac{\left(\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot x^k\right)'}{(x^n)'}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot k \cdot x^{k-1}}{n \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k}{n \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot x^{k+1}}{n \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^k - \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \cdot x^{k+1} + (-1)^n \cdot x^n}{n \cdot x^{n-1}}$$

$$= \frac{\cancel{-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^k} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^k} + (-1)^n x^n}{n \cdot x^{n-1}} = o(x)$$

(Questa in realtà non è per induzione.)

$$D^{(n)} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Per induzione. Vero per $n=0$ con $p_0 = q_0 = 1$.

Sia vero per n. Allora

$$D^{(n+1)} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)'$$

$$= \frac{p_n'(x) \cdot q_n(x) - p_n(x) \cdot q_n'(x)}{q_n(x)^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$+ \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{2}{x^3}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \underbrace{\frac{x^3 \cdot p_n'(x) \cdot q_n(x) - x^3 \cdot p_n(x) q_n'(x) + 2 p_n(x) q_n(x)}{x^3 \cdot q_n(x)^2}}_{\text{numeratore e denominatore sono polinomi}}$$