Ist. Mat. I - CIA

2/11/23

limite funz. element + ottenute con operaz. algebriche
+ composizioni
sempre il valore tranne forme indeterminate

$\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \left( 0 = \frac{1}{\infty}, \ \log(1^\circ) = \infty \cdot 0 = \frac{\infty}{\infty} \right)$

Confronti fondamentali sono: in $+\infty$ sono infiniti crescenti

$\log_a(x) < \log_b(x) < x^\alpha < x^\beta$

$a > 1 \qquad b > a > 1 \qquad \alpha > 1 \qquad \beta > \alpha > 1$

$< a^x < b^x$

$a > 1 \qquad b > a > 1$

Ne deriva una gerarchia di 0 e $\infty$ in 0 e $\infty$.

Inoltre altre f.i. si risolvono con limiti notevoli (in 0)

$\sin(x) \sim x \qquad \log(1+x) \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \qquad 1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2} x^2 \quad \ldots$

**Esercizio:** calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ $\qquad p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

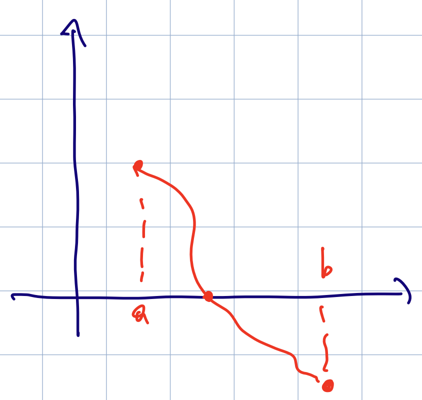
——— o ———

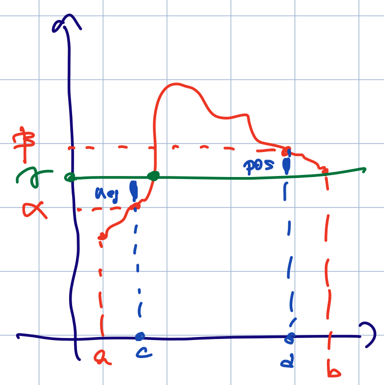
Ricordo: $f: I \to \mathbb{R}$ continua in $c \in I$ se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Continua su $I$ se lo è in ogni $c \in I$.

**Teo** (dei valori intermedi): $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con valori non concordi agli estremi allora $f$ ha uno zero.

**Cor:** se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e assume valori $\alpha < \beta$ allora assume tutti i valori compresi tra $\alpha$ e $\beta$.

**Dim** (cor):




Se $\alpha < \gamma < \beta$ e $\alpha = f(c)$ $\quad \beta = f(d)$ si applica il teo a $g = f|_{[c,d]} - \gamma$.

Dim (Teo): so che $f(a)\cdot f(b) \leq 0$.

Se $f(a)=0$ o $f(b)=0$ fine.

Altrimenti ho $f(a)\cdot f(b)<0$ dunque

$$\underbrace{f(a)<0<f(b)}_{\text{faccio questo}} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{f(b)<0<f(a)}_{\text{analogo}}$$

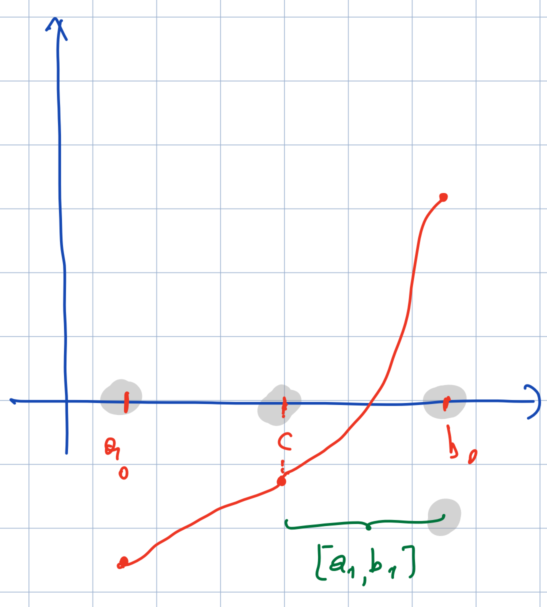
Chiamo $a_0=a$, $b_0=b$.

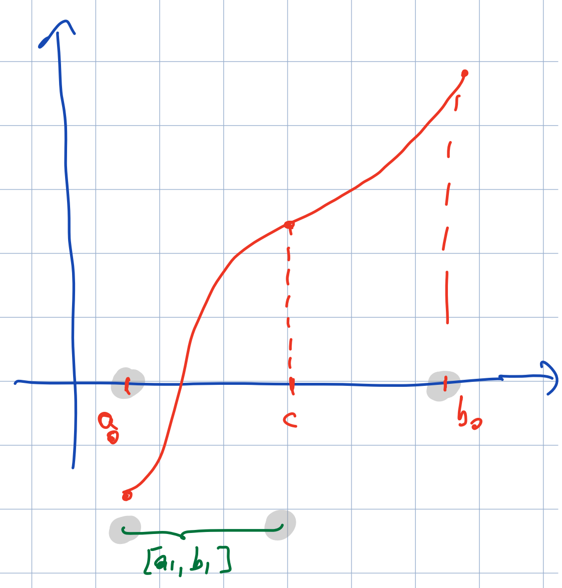
Pongo $c=\frac{a_0+b_0}{2}$; tre casi:

$f(c)=0$ fine

$f(c)<0$ allora pongo $a_1=c$ $b_1=b_0$

$f(c)>0$ allora pongo $a_1=a_0$, $b_1=c$




Considero $f$ su $[a_1,b_1]$: sempre continua e

$f(a_1)<0<f(b_1)$ e $b_1-a_1=\frac{b_0-a_0}{2}$.

Itero: costruisco $a_n, b_n$ t.c. $a_n < b_n$

$a_n \nearrow$ $\quad b_n \searrow$ $\quad b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

$f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

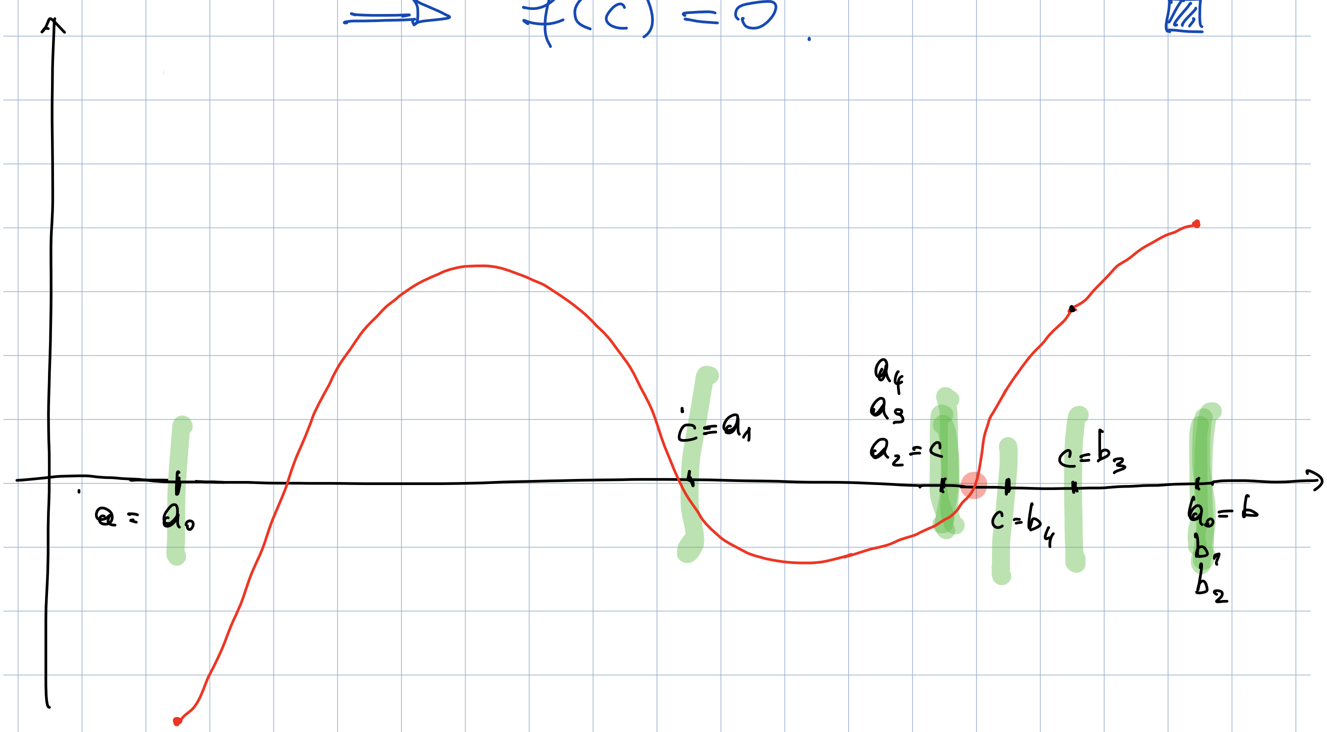
Ora $a_n \nearrow c_-$ $\quad b_n \searrow c_+$ $\quad b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$

$\Rightarrow c_- = c_+ = c \in [a,b]$.

$$\underbrace{f(\underset{\downarrow c}{a_n})}_{\downarrow} < 0 < \underbrace{f(\underset{\downarrow c}{b_n})}_{\downarrow}$$

$$f(c) \leq 0 \leq f(c)$$

$$\Longrightarrow f(c) = 0 .$$

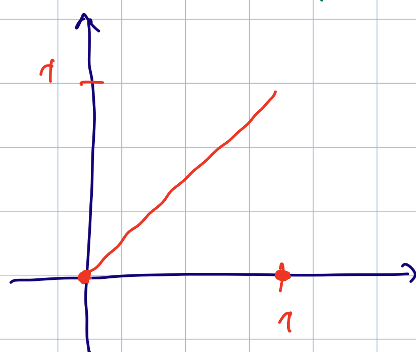


Teo (di Weierstrass) : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua allora ha max e min.

Le ipotesi di $f: I \to \mathbb{R}$
- $I$ limitato — $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ $\nexists$ max
- $I$ chiuso — $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $\nexists$ max
- $f$ continua — $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq 1 \\ 0 & x=1\end{cases} \quad \nexists \text{ max}$$

sono tutte nec.




Dimo: pongo $S=\sup_{[a,b]} f$.

Esiste sempre: devo vedere che è finito ed è assunto.

Pongo $a_0=a$, $b_0=b$. Posto $c=\frac{a_0+b_0}{2}$

osservo che $S=\max\left\{\sup_{[a_0,c]} f,\ \sup_{[c,b_0]} f\right\}$.

Se $S=\sup[a_0,c]$ pongo $[a_1,b_1]=[a_0,c]$

Se $S=\sup[c,b_0]$ pongo $[a_1,b_1]=[c,b_0]$.

Iterando trovo:

$$a_n \nearrow c \qquad b_n \searrow c$$

$$S = \sup_{[a_n,\, b_n]} f.$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta$ t.c. $\quad |f(x)-f(c)|<\varepsilon \quad \forall x\in I,\ |x-c|<\delta.$

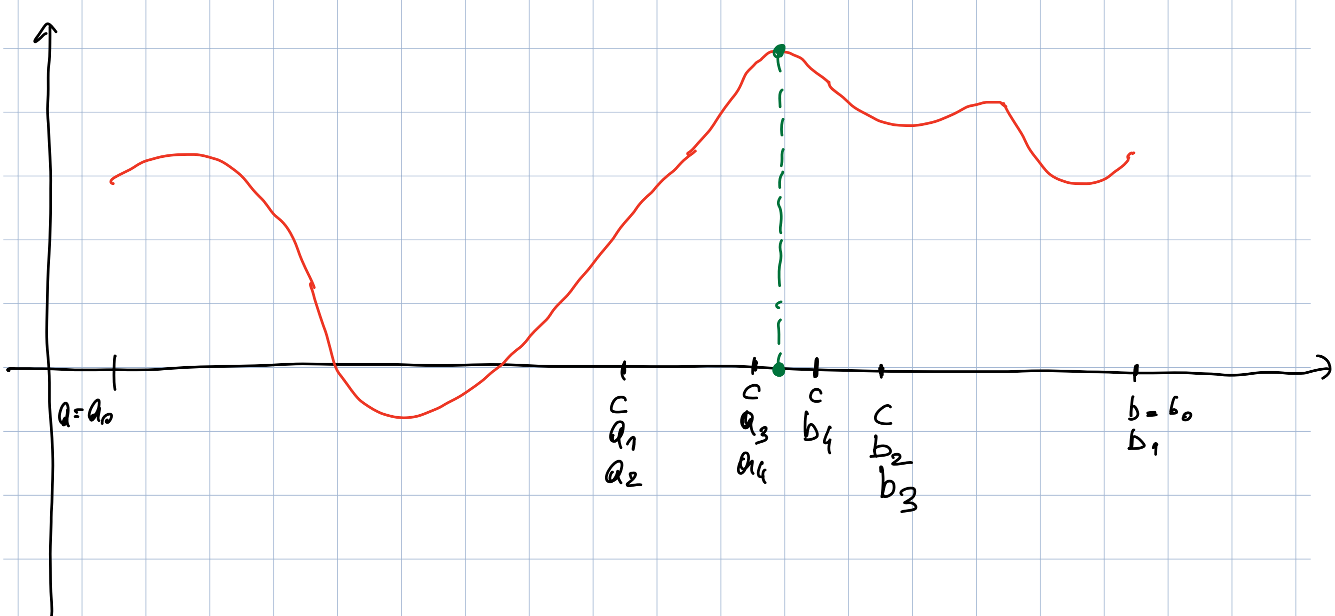
$\exists N$ t.c. $\quad c-\delta < a_n < b_n < c+\delta \quad \forall n\geq N$

$$\Rightarrow f(c)-\varepsilon < f(x) < f(c)+\varepsilon \quad \forall x\in[a_n, b_n],\ n\geq N.$$

$\Rightarrow S \leq f(c)+\varepsilon$ (finito)

anzi $\quad |S-f(c)|<\varepsilon.$

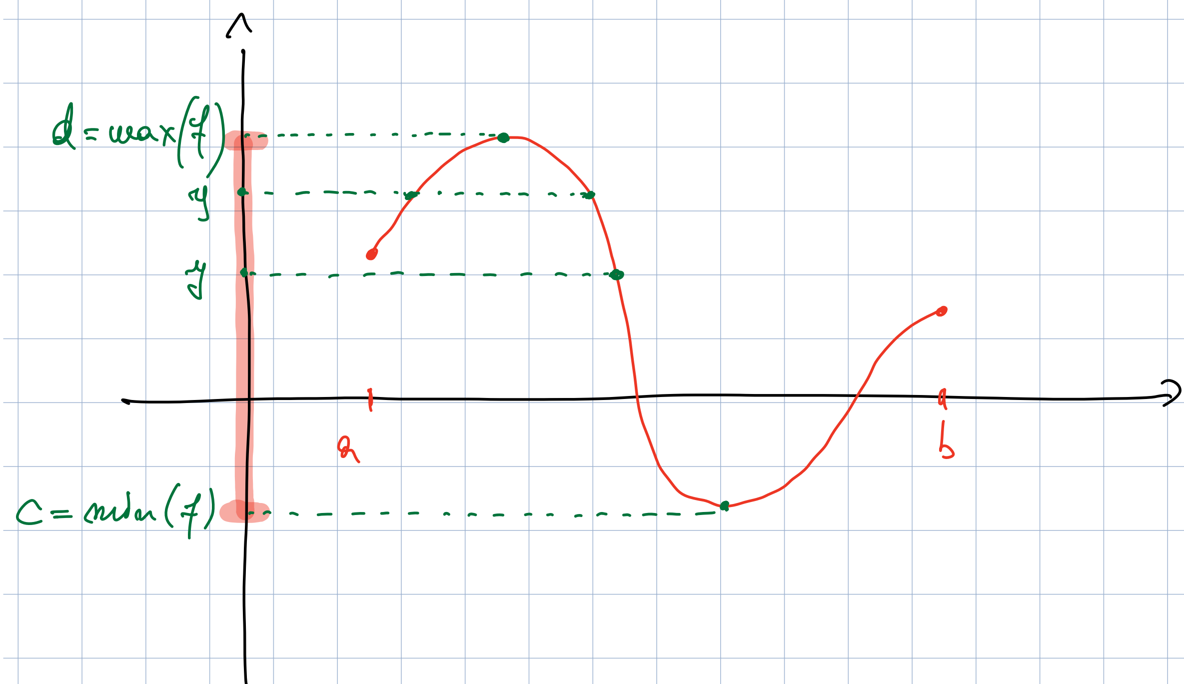
$\Rightarrow S=f(c).$



Ricordo: $f: I \to \mathbb{R}$ (str.) monotona se (str.) crescente o decrescente.

Oss: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è str. monotona è iniettiva dunque si annulla in al più un punto.

Cor: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora la sua immagine $f([a,b]) = [c,d]$.



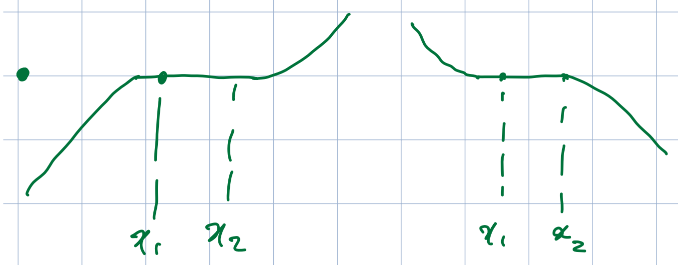

Teo: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $[c,d] = f([a,b])$.
Allora $f$ come funzione da $[a,b]$ a $[c,d]$ è invertibile $\iff$ str. monotona.

per essere preciso dovrei dire che considero $g: [a,b] \to [c,d]$ con $g(x) = f(x) \;\forall x$

"abbreviazione"

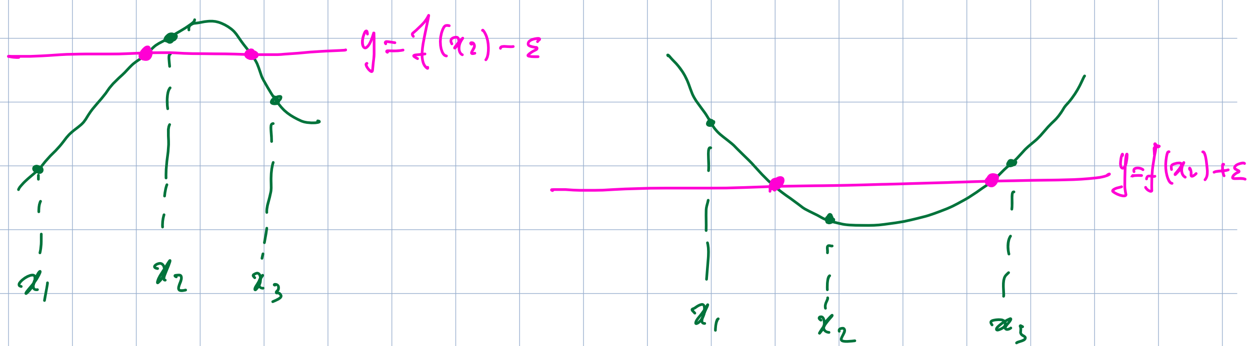
**Dim:** $\Leftarrow$ : è surgettiva perché ho preso $[c,d] = f([a,b])$;
è iniettiva perché str. monotona.

$\Rightarrow$ : Se $f$ non è str. monotona ho due casi

- 


  $\exists\, x_1 < x_2$ t.c. $f(x_1) = f(x_2)$

  $\Rightarrow f$ non iniettiva.

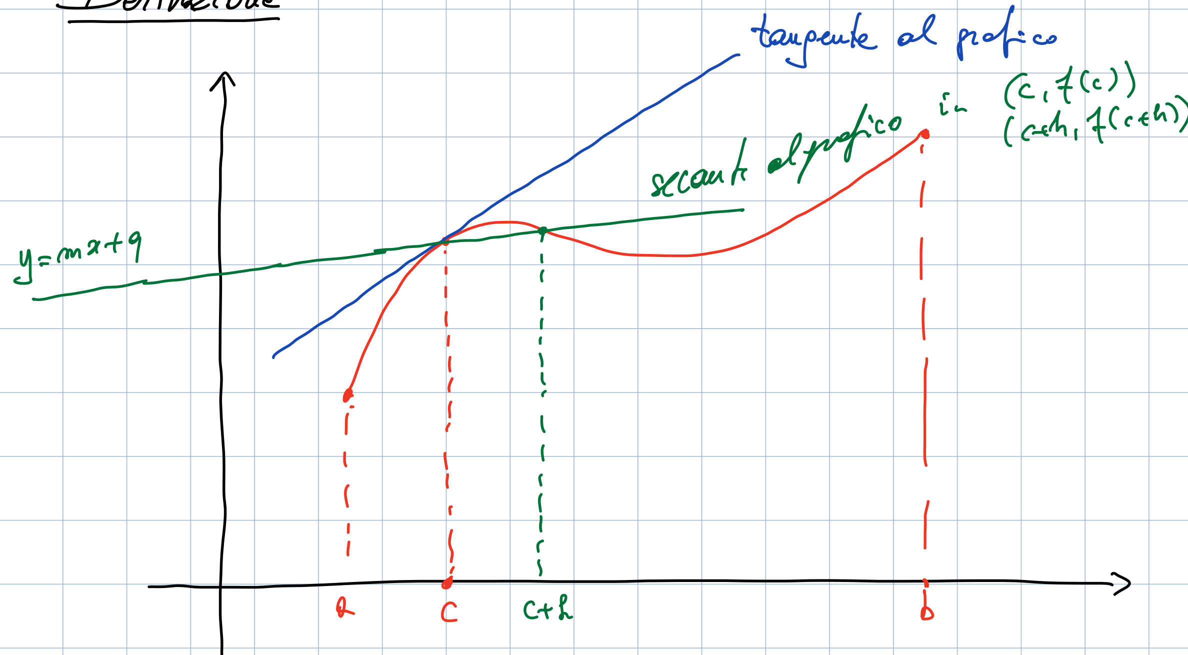
- 


  $x_1 < x_2 < x_3$

  $f(x_2) > f(x_1), f(x_3)$ $\qquad$ $f(x_2) < f(x_1), f(x_3)$

$\Rightarrow$ non iniettiva. $\blacksquare$

# Derivazione




$$\frac{y - f(c)}{f(c+h) - f(c)} = \frac{x - c}{(c+h) - c} \Longrightarrow m = \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}}$$

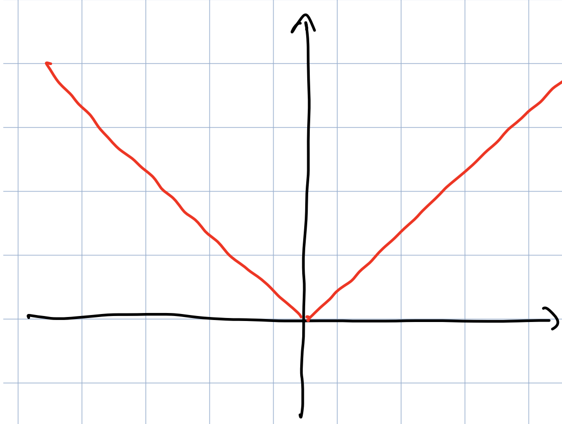
Def: chiamo derivata (prima) di $f$ in $c$ il
$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ se esiste, indicato $f'(c)$.

In tal caso chiamo tangente al grafico di $f$ nel punto $(c, f(c))$ la

$$y = f'(c) \cdot (x - c) + f(c).$$

Es: $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \begin{cases} x > 0 & \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \\ x < 0 & \lim_{h \to 0} \frac{-x-h-(-x)}{h} = -1 \end{cases}$$



$x=0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h}$ non esiste

<u>Def</u>: chiamo (se esiste) derivata prima dx/sx

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'_\pm(c)$$

———— o ————

Regole di derivazione:

- $(f+g)' = f'+g'$

Dati $f,g: I \to \mathbb{R}$, $c\in I$, $\exists f'(c), g'(c)$
posto $h: I \to \mathbb{R}$ $h(x) = f(x)+g(x)$ si ha
$h'(c) = f'(c)+g'(c)$

- $(k\cdot f)' = k\cdot f' \qquad k\in\mathbb{R}$

<u>Oss</u>: se $\exists f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \in \mathbb{R}$

ho
$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(f(c+h)-f(c)\right)}_{\downarrow \; 0} = \underbrace{\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\downarrow\; f'(c)} \cdot \underbrace{h}_{\downarrow\; 0}}_{\downarrow\; 0}$$

$\Rightarrow f$ continua in $c$.

• $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (regola di Leibnitz)

Dimo: calcolo

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(c+h) - (f \cdot g)(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) \cdot g(c+h) - f(c) \cdot g(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) \cdot g(c+h) - f(c) \cdot g(c+h) + f(c) \cdot g(c+h) - f(c) \cdot g(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\downarrow \; f'(c)} \cdot \underbrace{g(c+h)}_{\downarrow \; g(c)} + \underbrace{f(c)}_{= \; f(c)} \cdot \underbrace{\frac{g(c+h) - g(c)}{h}}_{\downarrow \; g'(c)} \right)$$

$$f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$$

$\boxed{\text{Fc}}$

• $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ dove $f \neq 0$

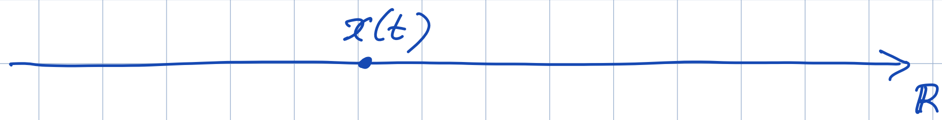
$$\frac{\frac{1}{f(c+h)} - \frac{1}{f(c)}}{h} = - \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\downarrow \; f'(c)} \cdot \frac{1}{f(c+h) \cdot f(c)}$$

$$f(c+h) \to f(c), \quad f(c) = f(c)$$

$$- \; f'(c) \cdot \frac{1}{f(c)^2}$$

- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$   **Esp**: dalla prec.

—— o ——




$x(t)$ = posizione su $\mathbb{R}$ al tempo $t$ di un punto

$$x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

spazio percorso dalla particella fra tempo $t$ e tempo $t+h$

tempo trascorso fra $t$ e $t+h$

$\Rightarrow$ $x'(t)$ = velocità di $x$ al tempo $t$.

Ora $\quad \frac{x'(t+h) - x'(t)}{h} = \frac{\Delta \text{ velocità}}{\Delta \text{ tempo}}$

$$\downarrow$$

$x''(t) = (x')'(t)$ = accelerazione di $t$.

$x''$ = derivata seconda.

Analogamente posso calcolare se esiste la derivata $n$-esima (assumendo che la $(n-1)$-esima esista su $I$)

come derivata della $(n-1)$-esima; notazioni:

$$f: I \to \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

---

Derivate di funzioni elementari:

- $D(\text{cost}) = 0$

$$f(x) = k \quad \forall x \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- $D(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$     Es: $\alpha \in \mathbb{N}$ ok via binomiale

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x^\alpha}} = \lim_{h\to 0} \left( \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \cdot x^{\alpha-1} \right)$$

$$= x^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y}}_{\alpha} \rightsquigarrow \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$