Soluzioni di alcuni esercizi lasciati per casa

1. $a \in \mathbb{R}$, $a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

$a^{n+1} = a \cdot a^n > 1 \cdot a^n = a^n$

dunque (a^n) cresce, pertanto ha limite L.

Per assurdo sia $L < +\infty$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ t.c.
$a^n > L - \varepsilon$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow a^{n+1} \geq a \cdot L - a \cdot \varepsilon$ ma $a^{n+1} < L$

dunque $L > a \cdot L - a \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon > L(a-1)/a$

contro l'arbitrarietà di ε.

2. $\lim (a_n) = A \in \mathbb{R}$ $\lim (b_n) = B \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

Dato $\varepsilon > 0$ cerco N t.c. $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$ per $n \geq N$. Prendo $\delta > 0$ che poi sceglierò in modo opportuno. Per def. di limite $\exists H, K$ t.c.
$|a_n - A| < \delta$ $\forall n \geq H$ $|b_n - B| < \delta$ $\forall n \geq K$.

Ora
$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| \\ &\leq (|A| + \delta) \cdot \delta + |B| \cdot \delta \\ &= \delta \cdot (|A| + |B| + \delta)\end{aligned}$$
per $n \geq \max(H, K) = N$.

Se $A=B=0$ basta scegliere $\delta=\sqrt{\varepsilon}$.
Altrimenti prendo $\delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}\}$ e ho $\delta<\varepsilon$.

3. $\lim(a_n)=L>0$ (anche $+\infty$) $\Rightarrow a_n>0$ per $n\geq N$.

Se $L\in\mathbb{R}$ prendere ε t.c. $L-\varepsilon>0$; per $L=+\infty$ prendere $M=0$ e usare la def.

4. $a_n\geq 0$, $\lim(a_n)=L \Rightarrow L\geq 0$

Se p.a. $L<0$ prendere $\varepsilon>0$ t.c. $L-\varepsilon<0$ e usare la def. di limite.

5. $a_n\leq b_n\leq c_n$, $a_n, c_n\to L \Rightarrow b_n\to L$

Dato ε ho
$|a_n-L|<\varepsilon$ per $n\geq H$
$|c_n-L|<\varepsilon$ per $n\geq K$
$\Rightarrow L-\varepsilon<a_n<b_n<c_n<L+\varepsilon$ per $n\geq \max(H,K)$.

6. $|a_n|\leq b_n$, $b_n\to 0 \Rightarrow a_n\to 0$

Dato $\varepsilon>0$ ho $||b_n|<\varepsilon$ per $n\geq N$
$\Rightarrow |a_n|\leq b_n<\varepsilon$ per $n\geq N$.

7. $a_n > 0 \ \forall n$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$

Scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $L - \varepsilon > 1$. Allora $\exists N$ t.c.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} & a_{N+1} > (L-\varepsilon) \cdot a_N \\ & a_{N+2} > (L-\varepsilon) \cdot a_{N+1} > (L-\varepsilon)^2 \cdot a_N \\ & a_{N+3} > (L-\varepsilon) \cdot a_{N+2} > (L-\varepsilon)^3 \cdot a_N \\ & \dots \\ & a_{N+k} > \underbrace{\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{(L-\varepsilon)^k}} \cdot \underset{\text{fisso}}{\underset{0}{\underset{\vee}{a_N}}}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \end{aligned}$$

8. $g: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$

$c \in \overline{I}$, $d \in \overline{J}$;

$\lim_{x \to c} g(x) = d$, $g(x) \neq d \ \forall x \neq c$;

$\lim_{y \to d} f(y) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to c} f(g(x)) = L.$

(Faccio il caso $c, d, L \in \mathbb{R}$; altri analoghi)

Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$ t.c.

$$|f(y) - L| < \varepsilon \quad \forall y \in J, \ y \neq d, \ |y-d| < \delta$$

$\exists \mu > 0$ t.c.

$|g(x)-d|<\delta \quad \forall x \in I, x \neq c, |x-c|<\mu$

$\Longrightarrow |f(g(x))-L|<\varepsilon \ \forall x \in I, x \neq c, |x-c|<\mu.$

9. $f: I \to \mathbb{R}, \ c \in \overline{I}, \ L \in \overline{\mathbb{R}};$

$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall (a_n)$ t.c. $\lim a_n = c$ e $a_n \neq c \ \forall n$ ho $\lim f(a_n) = L$.

Caso $c \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, altri analoghi.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ t.c. $|f(x)-L|<\varepsilon \ \forall x \in I, x \neq c, |x-c|<\delta;$

$\exists N$ t.c. $|a_n - c| < \delta \ \forall n \geq N$

$\Longrightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon \ \forall n \geq N.$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Per assurdo: $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$
$\exists x \in I, x \neq c, |x-c|<\delta, |f(x)-L| \geq \varepsilon.$

Applico ciò per $\delta = 2^{-n}$ trovando x che chiamo a_n.
Allora: $|a_n - c| < 2^{-n} \Longrightarrow \lim(a_n) = c;$
$|f(a_n)-L| \geq \varepsilon \Longrightarrow \lim(f(a_n)) \neq L.$