Ist. Mat. I - CIA
25/10/23

$(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ $\qquad a_n \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N$ t.c. $|a_n - L|<\varepsilon$ per $n\geq N$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \qquad S_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$$

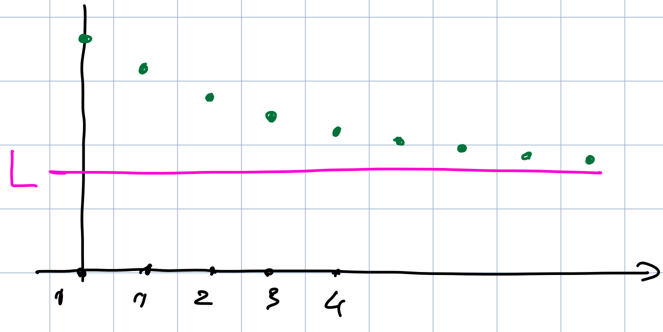
Prop: se $a>0$, $a\neq 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1.\end{cases}$

Dimo: $0<a<1$ (ese: $a>1$).

Oss: $a^{n+1} = a\cdot a^n < a^n$ dunque (a^n) è decrescente. Abbiamo visto che allora ha limite L, automaticamente $L\geq 0$. Provo che $L=0$ verificando che $L>0$ è assurdo. So che $\forall\varepsilon>0\ \exists N$ t.c.

$a^n < L+\varepsilon$ per $n\geq N$.

Allora: $a^{n+1} < L\cdot a + \varepsilon\cdot a$



$\Rightarrow a^{n+1} > L \quad \forall n$

$$\Rightarrow \quad L < L\cdot a + \varepsilon \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad L(1-a) < \varepsilon \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon > \frac{L(1-a)}{a}.$$

numero positivo fissato

arbitrariamente piccolo.

$\blacksquare$

Confronto tra ordini di 0 e di ∞:

Se $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$$

- $\to 0$ — a_n ha ordine di 0 più alto di b_n
- $\to L \neq 0$ — a_n, b_n hanno stesso ordine di 0
- $\to +\infty$ — b_n ha ordine di 0 più alto di a_n
- $\to$ altro — ......

ES: •) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $\qquad b_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/n}{1/n^2} = n \longrightarrow +\infty$$

b_n zero di ordine superiore ad a_n

•) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $\qquad b_2 = \dfrac{3}{n+5}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+5}{3n} \longrightarrow \frac{1}{3}$$ stesso ordine di 0

Se $\lim(a_n) = \lim(b_n) = +\infty$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} 0 & b_n \text{ è } \infty \text{ di ordine più alto di } a_n \\ L \neq 0 & a_n, b_n \text{ stesso ordine di } \infty \\ +\infty & a_n \text{ è } \infty \text{ di ordine più basso di } b_n \\ \text{non esiste} & \ldots\ldots \end{cases}$$

__Es__: • $a_n = 2^n \qquad b_n = 3^n$

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0 \implies a_n \text{ è } \infty \text{ di ordine più basso di } b_n$$

• $a_n = 2n^2 \qquad b_n = n^2 + 7$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^2}{n^2+7} \longrightarrow 2 \implies \text{stesso ordine di } \infty.$$

Confronti fondamentali (alcuni li proveremo):

In ordine di ∞ crescente troviamo:

$$\underset{(a>1)}{\log_a(n)} < \underset{(\alpha>0)}{n^\alpha} < \underset{(a>1)}{a^n} < n!$$

In ordine di 0 crescente troviamo:

$$\underset{(0<a<1)}{\log_a(n)} \prec \underset{(\alpha<0)}{n^\alpha} \prec \underset{(0<a<1)}{a^n} \prec \frac{1}{n!}$$

Conseguenza: $\lim(a_n) = \lim(b_n) = \lim(c_n) = 0$

b_n ha ordine di 0 più alto di a_n

$$\lim \frac{a_n + b_n}{c_n} = \lim \frac{a_n}{c_n} \quad \text{se esistono}$$

posso trascurare l'addendo che va a 0 più velocemente

———— o ————

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n$$

se entrambi esistono finiti.

Dimo: chiamo $A = \lim(a_n)$ $B = \lim(b_n)$

Voglio provare che $\lim(a_n+b_n) = A+B$ cioè

$\forall \varepsilon>0$ $\exists N$ t.c. $|(a_n+b_n) - (A+B)| < \varepsilon$ per $n \geq N$.

Noto che $|(a_n+b_n)-(A+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$

Uso la def. di $\lim(a_n) = A$ $\lim(b_n) = B$:

$\exists K$ t.c. $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ per $n \geq K$

$\exists H$ t.c. $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ per $n \geq H$

$\Longrightarrow$ se $N = \max\{K, H\}$ ho

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per } n \geq N$$

$$\Longrightarrow \quad |(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon \quad \text{per } n \geq N. \qquad \blacksquare$$

- $\lim(a_n) = +\infty$, b_n inf. lim. $\Longrightarrow$ $\lim(a_n + b_n) = +\infty$
- $\lim(a_n) = -\infty$, b_n sup. lim. $\Longrightarrow$ $\lim(a_n + b_n) = -\infty$
- $\lim(a_n) = \boxed{+\infty}$ $\quad \lim(b_n) = \boxed{-\infty}$
  $\lim \boxed{(a_n + b_n)}$ può esistere finito o $\pm\infty$ o non esistere

- $a_n = 2n \qquad b_n = -n \qquad a_n + b_n \longrightarrow +\infty$
- $a_n = n + 5 \qquad b_n = -n \qquad a_n + b_n \longrightarrow 5$
- $a_n = n + (-1)^n \qquad b_n = -n \qquad a_n + b_n$ non ha limite.

$+\infty + (-\infty) = \infty - \infty$ è una forma indeterminata.

<u>Limite del prodotto</u>:

- $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$ se entrambi esistono finiti.

(Ese: provarlo formalmente con ε)

- $\lim(a_n) = 0$ $\quad b_n$ limitata
  $\Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = 0$

- $\lim(a_n) = +\infty$, $b_n \geq k > 0$ (inf. limitata con inf positivo)
  $\Rightarrow \lim(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

(varianti con segni diversi)

- $\lim(a_n) = \boxed{0}$ $\quad \lim(b_n) = \boxed{+\infty}$
  $\Rightarrow \lim\boxed{(a_n \cdot b_n)}$ può fare qualsiasi cosa

- $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = n$ $\quad a_n \cdot b_n \longrightarrow 1$
- $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad b_n = n$ $\quad a_n \cdot b_n \longrightarrow 0$
- $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = n^2$ $\quad a_n \cdot b_n \longrightarrow +\infty$
- $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = \begin{cases} 2n & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$ $\quad a_n \cdot b_n$ non ha limite

$0 \cdot \infty$ è una forma indeterminata

- $\lim(-a_n) = -\lim(a_n)$

- $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim(a_n)}$ se $\lim(a_n)$ esiste finito.

  " $= 0$ se $\lim(a_n) = \pm\infty$

  " $= \pm\infty$ se $\lim(a_n) = 0^{\pm}$

  [$\lim a_n = 0^+$ se
  - $\lim a_n = 0$
  - $\exists N$ t.c. $a_n > 0 \quad \forall n \geq N$]

Altre forme indet. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

— o —

- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$

  se entrambi esistono finiti e inoltre $a_n > 0$, $a_n \neq 1$ e $\lim a_n > 0$.

(Dimo: esercizio.)

Per studiare $\lim (a_n)^{b_n}$ conviene spesso prendere il logaritmo:

$$\log\left((a_n)^{b_n}\right) = b_n \cdot \log(a_n)$$

Fatto: se $b_n \cdot \log(a_n) \longrightarrow L$ allora

$$\lim\left((a_n)^{b_n}\right) = e^{L} \quad \left(\text{che vale } \begin{matrix} +\infty & L=+\infty \\ 0 & L=-\infty \end{matrix}\right)$$

Forme indeterminate di tipo esponenziale:

$$1^{\pm\infty} \overset{\log}{\rightsquigarrow} \pm\infty \cdot \log(1) = \pm\infty \cdot 0$$

$$0^{0} \overset{\log}{\rightsquigarrow} 0 \cdot \log(0^{+}) = 0 \cdot (-\infty)$$

$$(+\infty)^{0} \overset{\log}{\rightsquigarrow} 0 \cdot \log(+\infty) = 0 \cdot (+\infty)$$

<u>Esempi</u>: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1^{+\infty}$ (<u>fatto</u>: ha $\lim = e$)

$$\left(1/n\right)^{1/n} = 0^{0} \quad ; \quad \log \rightsquigarrow \frac{1}{n} \cdot \log\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$n^{1/n} = \infty^{0} \quad ; \quad \log \rightsquigarrow \frac{1}{n} \cdot \log(n).$$

<u>Oss</u>: 1) Se $\lim(a_n) = L > 0$ (oppure $+\infty$)

$\Longrightarrow \exists N$ t.c. $a_n > 0$ per $n \geq N$.

2) Se $a_n \geq 0$ $\forall n$ allora $L = \lim(a_n) \geq 0$ se esiste

(anche sapendo $a_n > 0$ $\forall n$ si può avere $L = 0$)

3) $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\lim(a_n) = \lim(c_n) = L$

$\Longrightarrow \lim(b_n) = L$.

4) $|a_n| \leq b_n$, $\lim b_n = 0 \Longrightarrow \lim a_n = 0$.

(Ese: dim. con ε facili)

5) se $h < k$ allora n^k ha ordine di ∞ più alto di n^h

Conseguenza: $\lim_{n\to\infty} p(n)$ se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

vale $\pm\infty$ a seconda del segno del coeff. dir.

Es: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{3}\cdot n^7 - 100^{100}\cdot n^2 + n\right) = +\infty$

Conseguenze: $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ se $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\to \pm\infty$ se grado di $p(x)$ > grado di $q(x)$
$\pm$ = rapporto coeff. dir.

$\to L$ se grado $p(x)$ = grado $q(x)$

$\to 0$ se grado di $p(x)$ < grado $q(x)$

Es:
$$\frac{4n^5 - 17n^3 + 3}{-2n^4 + n - \sqrt{2}} \longrightarrow -\infty$$

$$\frac{2n^7 - 43n^3 + n}{-5n^7 + n^4 - 3} \longrightarrow -\frac{2}{5}$$

$$\frac{2n^7 - 43n^3 + n}{\sqrt{11}\,n^8 + 2} \longrightarrow 0$$

Metodo per risolvere alcune forme indet. $\infty - \infty$:
sfruttare i prodotti notevoli $(\infty - \infty) \cdot \underbrace{\frac{\infty + \infty}{\infty + \infty}}_{1} = \frac{\infty^2 - \infty^2}{\infty + \infty}$

Es: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$= \frac{(n+1) - (n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Prop: data (a_n) con $a_n > 0$ se
$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ esiste :

- $L < 1$ allora $\lim (a_n) = 0$
- $L > 1$ allora $\lim (a_n) = +\infty$.

($L = 1$ nessuna conclusione).

Dim: se $L < 1$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $\boxed{L + \varepsilon < 1}$.

$\exists N$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Dunque
$$a_{N+1} < (L+\varepsilon) \cdot a_N$$
$$a_{N+2} < (L+\varepsilon) \cdot a_{N+1} < (L+\varepsilon)^2 \cdot a_N$$
$$a_{N+3} < (L+\varepsilon) \cdot a_{N+2} < (L+\varepsilon)^3 \cdot a_N$$
$$\vdots$$
$$a_{N+k} < \underbrace{(L+\varepsilon)^k}_{} \cdot \underbrace{a_N}_{}$$

$k \to \infty$ $\quad \underbrace{\overset{\downarrow}{0} \qquad \text{fissato}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$

$\Rightarrow a_{N+k} \to 0$ cioè $a_n \to 0$.

(Ese: caso $L > 1$). $\blacksquare$

Oss: conoscendo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ non posso concludere:

$a_n = n \qquad \frac{n+1}{n} \to 1 \qquad n \to +\infty$

$a_n = \frac{1}{n} \qquad \frac{n}{n+1} \to 1 \qquad \frac{1}{n} \to 0$

$a_n = 1 \qquad \frac{1}{1} \to 1 \qquad 1 \to 1$

Considero $I \subset \mathbb{R}$ intervallo (lim o no a sx/dx chiuso o no a sx/dx)

$\overline{I}$ intervallo $I \cup$ i suoi estremi (compresi $\pm\infty$)

Es: $I = (3, +\infty)$ $\qquad \overline{I} = [3, +\infty] = [3, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Se $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in \overline{I}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dico che

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

se ... "per $x \in I$ abbastanza vicino a c, ma $\neq c$ ho che $f(x)$ è vicino a L".

Ho 9 casi a seconda che

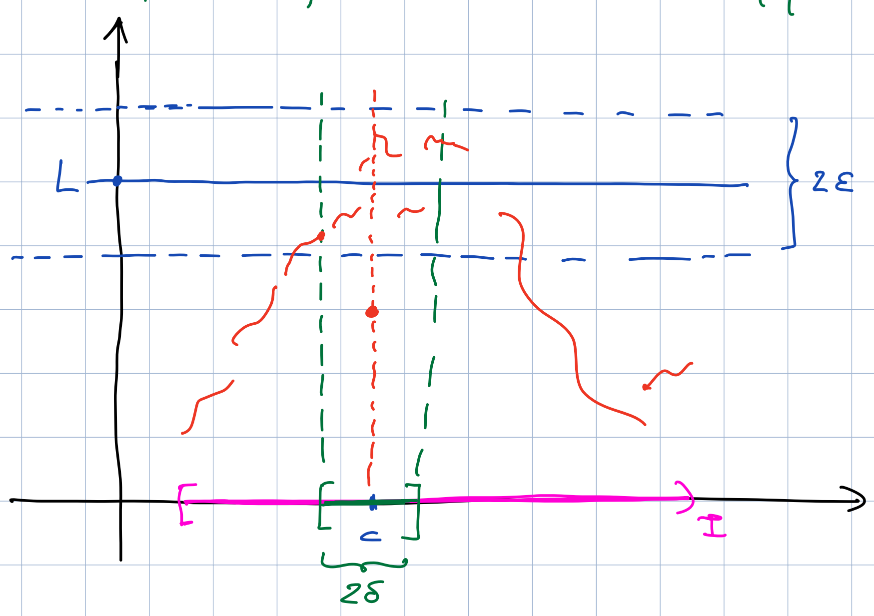
$c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$, $c = -\infty$
$L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$, $L = -\infty$

Dove "z vicino a y significa":

- se $y \in \mathbb{R}$: $|z - y| < \varepsilon$ con ε piccolo
- se $y = +\infty$: $z > K$ con K grande positivo
- se $y = -\infty$: $z < -K$ con K grande positivo.

- $c \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$\forall x \in I, x \neq c, |x - c| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$



$c = +\infty \quad L = -\infty \qquad I = \ldots, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{se}$$

$\forall K > 0 \quad \exists H > 0 \quad$ t.c.

$f(x) < -K \quad \forall x \in I \quad$ t.c. $\; x > H$