Ist Mat I

29/9/23

lorenzo.venturello@unipi.it

Esercizio 4 - Divisione euclidea tra interi

$m \geq n \longrightarrow m = qn + r$

1.a $\quad 23 : 5 = \underset{q}{\underset{\uparrow}{4}} \cdot 5 + \underset{r}{\underset{\uparrow}{3}}$

d $\quad 133 : 31 = 4 \cdot 31 + 9$

Esercizio 5

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \qquad , \qquad |\alpha| < 1$$

a) $\quad 0,\overline{4} = 4 \cdot 0,\overline{1} = 4 \cdot (0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots)$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots \right) - 4$$

$$= 4 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10}^k \right) - 4$$

USO LA FORMULA

$$= 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 4$$

$$= 4 \cdot \frac{10}{9} - 4 = \frac{40-36}{9} = \frac{4}{9}$$

REGOLA

$$0,\overline{4} = \frac{4-0}{9} = \frac{4}{9}$$

2. $0,\underset{\text{ANTIPERIODO}}{2}\,\overline{3} \leftarrow$ PERIODO

$$= 0,2 + 0,0\overline{3}$$

$$= \frac{2}{10} + 3\left(0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots\right)$$

$$= \frac{2}{10} + 3\left(\frac{1}{10}^2 + \frac{1}{10}^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{2}{10} + 3\cdot\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}^2 + \dots\right) - 3 - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{2}{10} + 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10}^k\right) - 3 - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{2}{10} + 3\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) - 3 - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{30}{9} - 3 - \frac{3}{10} = \frac{18 + \overset{30}{30\cancel{0}} - 270 - 27}{90}$$

$$= \frac{21}{90}$$

REGOLA

$$0{,}2\bar{3} = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90}$$

d. $0{,}\overline{37} = (0{,}3 + 0{,}003 + 0{,}00003 + \dots) +$

$$(0{,}07 + 0{,}0007 + \dots)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}^3 + \frac{1}{10}^5 + \dots \right) +$$

$$7 \cdot \left(\frac{1}{10}^2 + \frac{1}{10}^4 + \dots \right)$$

$$= 7 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}^2 + \frac{1}{100}^3 + \dots \right) +$$

$$\frac{3}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}^2 + \frac{1}{100}^3 + \dots \right)$$

$$= 7 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}^2 + \dots \right) - 7 +$$

$$\frac{3}{10} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{100}^k \right)$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 7 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{700}{99} - 7 + \frac{30}{99}$$

$$= \frac{700 - 693 + 30}{99} = \frac{37}{99}$$

REGOLA: $0,\overline{37} = \frac{37 - 0}{99} = \frac{37}{99}$

ESERCIZIO 6

6. SIA $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. ALLORA $n! > 2^n$

RICORDO $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ $(0! = 1)$

$$n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ NUMERI NATURALI}} > 2^n$$

a. SIA $n \in \mathbb{N}$, n DISPARI. ALLORA n^2 È DISPARI

n DISPARI $\Rightarrow n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2 \cdot (\underbrace{2k^2 + 2k}_{k' \in \mathbb{N}}) + 1$

$\Rightarrow n^2$ È DISPARI

$\square$

d. SIANO $n, m \in \mathbb{N}$. SE $n^2 + m^2$ È PARI ALLORA $n+m$ PARI

METODO PER ASSURDO: SI PARTE NEGANDO LA TESI

ASSUMIAMO PER ASSURDO $n+m$ SIA DISPARI

$n+m$ DISPARI $\Rightarrow n+m = 2k+1 \quad , k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (n+m)^2 = (2k+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2+m^2 + 2nm = 4k^2+4k+1$$

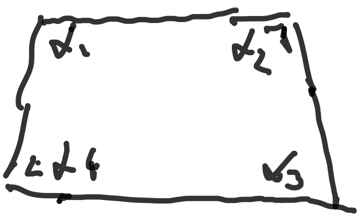
$$\Rightarrow n^2+m^2 = 4k^2+4k-2nm+1$$

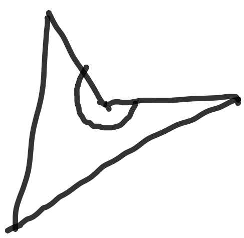
$$\Rightarrow n^2+m^2 = 2(2k^2+2k-nm)+1$$

$\Rightarrow n^2+m^2$ È DISPARI.

CONTRADDICE L'IPOTESI $\square$

e. SE UN QUADRILATERO HA DUE ANGOLI RETTI GLI ALTRI DUE SONO CONVESSI ($\leq 180°$)





$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360°$$

SIANO $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$

NEGAZIONE TESI: ALMENO UNO DEI RIMANENTI È CONCAVO $\alpha_3 > 180^\circ$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ \implies \underbrace{90^\circ + 90^\circ}_{180^\circ} + \alpha_3 + \alpha_4 = 360$$

$$\implies \alpha_4 = 180^\circ - \alpha_3$$

$$\implies \alpha_4 < 180^\circ - 180^\circ = 0$$

ASSURDO, α_4 È ANGOLO INTERNO DI UN QUADRILATERO.

$\square$

f. DIMOSTRARE CHE $f(n) = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ È DIVISIBILE PER 11, CON $n \in \mathbb{N}$.

PASSO BASE $(n = 0)$ $\quad f(0) = 9 + 2 = 11$ È DIVISIBILE PER 11 ✓

PASSO INDUTTIVO (ASSUMERE LA TESI VERA PER TUTTI I VALORI $\leq n$)

$$f(n+1) = 9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1} = 9^{n+2} + 2^{6n+7}$$

$$= 9 \cdot 9^{n+1} + 2^6 \cdot 2^{6n+1}$$

$$= 9 \cdot 9^{n+1} + 64 \cdot 2^{6n+1}$$

$$= 9 \cdot 9^{n+1} + 9 \cdot 2^{6n+1} + 55 \cdot 2^{6n+1}$$

$$= 9\big(\underbrace{9^{n+1} + 2^{6n+1}}_{f(n)}\big) + 55 \cdot 2^{6n+1}$$

$K \in \mathbb{N}$

$$= 9 \cdot 11 \cdot K + 11 \cdot 5 \cdot 2^{6n+1} = 11\left(9K + 5 \cdot 2^{6n+1}\right)$$

QUINDI $f(n+1)$ È DIVISIBILE PER 11. $\square$

9. SIA X UN INSIEME CON $|X| = n$

ALLORA $|P(X)| = 2^n$.

RICORDO $P(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$

PASSO BASE $(n=0)$

$$|X| = 0 \Rightarrow X = \emptyset \Rightarrow P(X) = \{\emptyset\}$$

$$\Rightarrow |P(X)| = 2^0.$$

PASSO INDUTTIVO SE $|X| \leq n$ ALLORA $|P(X)| = 2^n$

SIA X CON $|X| = n$

SIA $Y = X \cup \{x\}$. QUINDI $|Y| = n+1$

$$P(Y) = \underbrace{\{Z \subseteq Y : x \in Z\}}_{A} \cup \underbrace{\{Z \subseteq Y : x \notin Z\}}_{B}$$

$$|P(Y)| = |A| + |B|$$

$$B = P(X) \implies |B| = 2^n$$

$$A = \{Z \subseteq Y : x \in Z\} = \{Z' \cup \{x\} \subseteq Y : x \notin Z'\}$$
$$= \{Z' \cup \{x\} : Z' \subseteq X\}$$

A HA UN ELEMENTO $Z' \cup \{x\}$ PER OGNI ELEMENTO $Z' \in P(X) \implies |A| = |P(X)| = 2^n$

$$|P(Y)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad \square$$

EJEMPIO

SE $X = \{1, 2, 3\}$

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \cup$$
$$\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$