Ist. Mat. I - C/A
28/9/23

COMBINAZIONI DI k OGGETTI SU n

= scegliere k oggetti non ordinati fra n

= trovare i sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n

$n = 5 \quad k = 2$

$\{a, b, c, d, e\}$

$\{a,b\}\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{a,e\}\ \{b,c\}$
$\{b,d\}\ \{b,e\}\ \{c,d\}\ \{c,e\}\ \{d,e\}$

$\underline{\underline{10}}$

k oggetti ~~ordinati~~ fra n: $\dfrac{n}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$

non ordinati: $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

coefficiente binomiale

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 1\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 10$$

Convenzione: $0! = 1$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1$$

In generale: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad\qquad \frac{n!}{(n-k)!\cdot(\underbrace{n-(n-k)}_{k})!}$$

<u>Prop</u>: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$

Es: $(x+y)^5 = \binom{5}{0}\cdot x^5\cdot y^0 + \binom{5}{1}\cdot x^4\cdot y^1 + \binom{5}{2} x^3\cdot y^2$
$+ \binom{5}{3}\cdot x^2\cdot y^3 + \binom{5}{4} x^1\cdot y^4 + \binom{5}{5} x^0 y^5$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

<u>Dimo 1</u>: $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n}$

$\rightarrow$ distrib. 2^n addendi ciascuno ottenuto prelevando x o y da uno dei binomi

<u>Es</u>: $n=5$ $\quad (x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$
$= \underline{32}$ addendi

$= \ldots \underbrace{x^2y^3}$

compare ogni volta che prelevo x da 2 monomi e y dagli altri $5-2=3$ tra i 5

In generale $x^{n-k}\cdot y^k$ compare tra i 2^n

addendi tante volte quante sono le scelte di k monomi su n da cui prelevo y (e prelevo x dagli altri $n-k$):

$$(x+y)^n = \cdots\cdots + \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k . \qquad \blacksquare$$

Prop: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ $\qquad k = 1, \dots, n$

Dim: $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{\cancel{k} + n \cancel{-k} + 1}{k \cdot (n+1-k)}$$

$$= \frac{\overbrace{(n+1) \cdot n!}^{(n+1)!}}{\underbrace{k \cdot (k-1)!}_{k!} \cdot \underbrace{(n+1-k) \cdot (n-k)!}_{(n+1-k)!}} = \frac{n+1}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \binom{n+1}{k} . \qquad \blacksquare$$

Ese: provare per induzione la formula $(x+y)^n = \sum \dots$

Come calcolare i coeff binomiali (triangolo di Tartaglia)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

$$1 \qquad 6 \qquad \boxed{15} \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1$$

$\binom{n}{k}$ = scelte di k el. tra n = numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\text{numero di sottoins. con } k \text{ el. } \dots\right) = \text{numero di el. di } \mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_n\}) = 2^n$$

$$\|$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE DI k OGGETTI SU n

Scelte di k elementi non ordinati tra n anche ripetuti.

Es: $n = 5$ $k = 2$ $\{a, b, c, d, e\}$

aa ab ac ad ae bb bc bd be
cc cd ce dd de ee

$\boxed{\underline{15}}$

Scegliere k elementi distinti in $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

= scegliere $y_1, y_2, \dots, y_k$ con $1 \le y_1 < y_2 < \dots < y_k \le n$

Scegliere k elementi anche non distinti in $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

= scegliere $y_1, y_2, \dots, y_k$ con $1 \le y_1 \le y_2 \le \dots \le y_k \le n$

Pongo $\boxed{z_j = y_j + j - 1}$ cioè:

$z_1 = y_1$ $z_2 = y_2 + 1$ $z_3 = y_3 + 2$ $\dots$

$z_k = y_k + k - 1$

$$1 \le z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_k \le n + k - 1$$

$\boxed{y_j = z_j - j + 1}$

Conclusione: le scelte non ordinate di k elementi con ripetizioni tra n sono

$$\binom{n+k-1}{k}$$

$n=5$
$k=2$

$$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2}$$

Domani: LV 11:30

OFA: TOLC oppure prova di gennaio Ist Mat I

Ese Foglio 1.

(1) elencare gli el. dell'insieme dato

(a) $\{n \in \mathbb{N}$: si scrive con 3 lettere$\}$ $= \{1, 2, 3, 6\}$

(b) $\{n \in \mathbb{N}$: $n-8$ si scrive con 8 consonanti$\}$
$= \{1, 2, 3, 6, 23, 31, \dots\}$

(c) $\{n \in \mathbb{N}$: $n < 100$ si scrive con n lettere$\}$
$= \{3, \dots\}$

(d) $\{x \in \mathbb{Q} : 4x^2 - 1 = 0\}$ $= \{\pm \frac{1}{2}\}$

(e) $\{x \in \mathbb{Z} : 4x^2 - 1 = 0\} = \emptyset$

(f) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 1 < 0\} = \emptyset$

(g) $\{x$ lettere $: \exists n \in \mathbb{N}$ che inizia con $x\}$

$= \{z, u, d, t, q, c, s, o, n, v, m\}$

$= \{c, d, \ldots, v, z\}$

(2) Dire se $X \subseteq Y$ e/o $Y \subseteq X$.

(a) $X = \{n \in \mathbb{N} : n = 17 \cdot k, k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$

$Y = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$

$X \subseteq Y$ poiché $17 \cdot k \geq 17 \cdot 1 > 10$

$Y \nsubseteq X$ poiché $11 \in Y$, $11 \notin X$.

(b) $X = \{x \in \mathbb{N} : x = 17 \cdot k \quad k \neq 0\}$

$Y = \{y \in \mathbb{N} : y = 18 \cdot h \quad h \neq 0\}$

$X \nsubseteq Y$ 17

$Y \nsubseteq X$ 36

(c) $X = \{x \in \mathbb{N} :$ multiplo di 2 e 3$\}$

$Y = \{y \in \mathbb{N} :$ multiplo di 6$\}$

$X = Y$ cioè $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

(d) $X = \{x \in \mathbb{N} :$ mult. non 0 di $17\}$
$Y = \{y \in \mathbb{N} :$ mult. non 0 di $51\}$

$X \not\subseteq Y$ 17

$Y \subseteq X$ $y \in Y \Rightarrow y = 51 \cdot k = 17 \cdot (3k) \Rightarrow y \in X.$

(f) $X = \{x \in \mathbb{N} :$ x primo$\}$
$Y = \{y \in \mathbb{N} :$ y non mult. di $5\}$

$X \not\subseteq Y$ 5

$Y \not\subseteq X$ 12

(3) Trovare $X \cap Y$ $X \cup Y$:

(a) $X = \{n \in \mathbb{N} :$ $n : 7$ ha resto $3\}$
$Y = \{n \in \mathbb{N} :$ $n < 38\}$

$X = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, \dots\}$
$Y = \{0, 1, 2, \dots, 37\}$

$X \cap Y = \{3, 10, 17, 24, 31\}$
$X \cup Y = \{0, 1, \dots, 37, 38, 45, 52, 59, \dots\}$

(b) $X = \{\text{consonanti}\}$

$Y = \{\text{iniziali } n < 38\}$

$X = \{ b, c, d, f, g, h, j, k, \ldots t, v, w, x, y, z \}$

$Y = \{ z, u, d, t, q, c, s, o, n, v \}$

$X \cap Y = \{ z, d, t, q, c, s, n, v \}$

$X \cup Y = \{\text{alfabeto}\} \setminus \{ a, e, i \}$

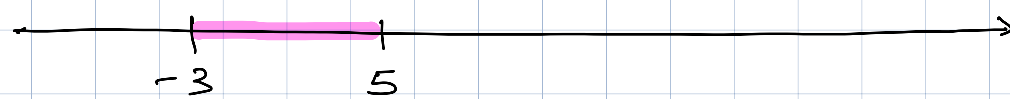
(c) $X = \{ x \in \mathbb{R} : |x-1| < 4 \}$

$Y = \{ x \in \mathbb{R} : (x+3)(x-6)(x-11) \leq 0 \}$

$X: \quad -4 < x-1 < 4 \qquad -3 < x < 5 \qquad (-3, 5)$

$Y:$

$(-\infty, -3] \cup [6, 11]$



$X \cap Y = \emptyset \qquad X \cup Y = (-\infty, 5) \cup [6, 11]$

(d) $X = \{ x \in \mathbb{Q} : 12x \in \mathbb{N}, x < 1 \}$

$Y = \{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \}$

$X = \{ -\frac{k}{12} : k \in \mathbb{N} \} \cup \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12} \}$

$Y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

$X \cap Y = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\}$

$X \cup Y = \dots$

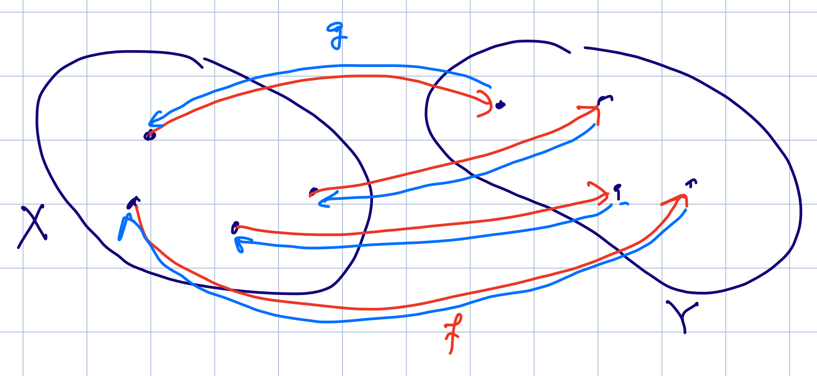
<u>Ese</u>: verificare che se $f : X \to Y$ è bigettiva allora è invertibile.

Bigettiva :

iniettiva $\quad \forall y \in Y$ esiste al più un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
surgettiva $\quad \forall y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$

$\Longrightarrow \quad \forall y \in Y$ esiste esattamente un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$

Devo esibire $g : Y \to X$ t.c.
$g \circ f = id_X \qquad f \circ g = id_Y$



Definisco $g : Y \to X$ scegliendo per ogni $y \in Y$
$g(y) =$ l'unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$

Devo vedere:

$g \circ f = id_X$ cioè $g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$.

pongo $y = f(x)$: allora $g(y) = x$

poiché x è l'unico t.c. $f(x) = y$

$f \circ g = id_Y$ cioè $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$.

pongo $x = g(y)$: significa che è quell'$x \in X$

t.c. $f(x) = y$ dunque $f(g(y)) = y$.