Ist. Mat. I – CIA
22/9/23

Ese: se X ha n elementi, $\mathcal{P}(X) = \{Y \subseteq X\}$ ne ha 2^n

Soluz. 1: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Come si determina un sottoinsieme Y di X? Rispondendo a:

$x_1 \in Y$? — sì / no $\Rightarrow 2$

$x_2 \in Y$? — sì / no $\Rightarrow 2$

$\dots \Rightarrow 2$

$x_n \in Y$ — sì / no

$\underbrace{2 \cdot 2}_{4}$, $\underbrace{4 \cdot 2}_{8}$, $\dots$, 2^n

Soluz. 2: Per induzione su n.

PB: $n = 0$; $X = \emptyset$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ ha $1 = 2^0$ elementi. ✓

PI: Supponiamo vero che se X ha n elem. $\mathcal{P}(X)$ ne ha 2^n.
Devo vedere che se A ha $n+1$ elem. $\mathcal{P}(A)$ ne ha 2^{n+1}.

Prendo un elemento $a \in A$ a caso.

$$\mathcal{P}(A) = \underbrace{\{Y \subseteq A : Y \not\ni a\}}_{=\ \mathcal{P}(A \setminus \{a\})} \sqcup \underbrace{\{Y \subseteq A : Y \ni a\}}_{=\ \{\{a\} \cup Z : Z \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\})\}}$$

$\mathcal{P}(A \setminus \{a\})$: siccome $A \setminus \{a\}$ ha n elementi ce ne sono 2^n

$\sqcup$: unione disgiunta

$K \sqcup H = T$ se $T = K \cup H$ e $K \cap H = \emptyset$

$\{\{a\} \cup Z : Z \in \mathcal{P}(A \setminus \{a\})\}$: ce ne sono 2^n

in tal caso il numero di el. di T è quello di K + quello di H

$\underbrace{\{1,5,19\}}_{3} \sqcup \underbrace{\{4,7\}}_{2} = \underbrace{\{1,4,5,7,19\}}_{5}$

$\underbrace{\{1,5,19\}}_{3} \cup \underbrace{\{5,7\}}_{2} = \underbrace{\{1,5,7,19\}}_{4}$

In tutto $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ $\boxtimes$

Ese: ogni $x \in \mathbb{Q}$ ha scrittura decimale periodica.

Sol: posso prendere $x > 0$; se $x < 0$ scrivo $-x > 0$ e poi aggiungo segno $-$

Comincio con $n \in \mathbb{N}$.

- se $0 \leq n \leq 9$; è già la sua scrittura decimale
- se $n \geq 10$ faccio $n : 10 \longrightarrow n = 10t_1 + s_1$, $0 \leq s_1 \leq 9$

s_1 è la cifra delle unità.

- se $0 \leq t_1 \leq 9$ t_1 è la cifra delle decine
- se $t_1 \geq 10$ faccio $t_1 : 10 \longrightarrow t_1 = 10t_2 + s_2$ $0 \leq s_2 \leq 9$

$n = 100t_2 + 10s_2 + s_1$

s_2 è la cifra delle decine

- se $0 \leq t_2 \leq 9$ t_2 è la cifra delle centinaia
- se $t_2 \geq 10$ faccio $t_2 : 10 \longrightarrow \dots$

procedendo mi fermo perché n è finito

Ora consideriamo $\frac{n}{m}$ con $n>0$, $m\geq 2$.

Faccio $n : m \longrightarrow n = m\cdot q_0 + r_0 \quad 0\leq r_0 < m$

cioè $\frac{n}{m} = q_0 + \frac{r_0}{m}$

ok! $\quad 0\leq \frac{r_0}{m} < 1$

$\frac{19}{7} = \frac{2\cdot 7+5}{7} = 2+\frac{5}{7}$

faccio $10\,r_0 : m \Longrightarrow 10 r_0 = m\cdot q_1 + r_1$

$\Longrightarrow \frac{r_0}{m} = 10^{-1}\cdot q_1 + 10^{-1}\left(\frac{r_1}{m}\right) \quad 0\leq \frac{r_1}{m} < 1$

$50 : 7 = 7\cdot 7 + 1$

$\frac{5}{7} = 10^{-1}\left(\frac{7\cdot 7+1}{7}\right) = 10^{-1}\cdot 7 + 10^{-1}\cdot\frac{1}{7}$

dunque q_1 è la prima cifra dopo la virgola

$\frac{5}{7} = 0.7\ldots$

faccio $10 r_1 : m \longrightarrow 10 r_1 = m\cdot q_2 + r_2$

q_2 è la seconda cifra dopo la virgola

continuo con $\frac{r_2}{m}$ che è $0\leq \ldots < 1$.

$10\cdot 1 : 7 \longrightarrow 10 = 7\cdot 1 + 3$

$\frac{5}{7} = 0.71\ldots$ continuo con 3

Tutte le cifre successive si trovano facendo

$10r_k : n \longrightarrow 10r_k = n \cdot q_{k+1} + r_{k+1}$

$$0 \leq r_k < n$$

Per r_k ho un numero finito di possibilità

$\longrightarrow$ dopo un po' si ripetono

<u>Ese</u>: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>Sol</u>: per induzione.

PB: $n=0$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 \qquad \frac{0(0+1)}{2} = 0$$

✓

PI: suppongo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

devo vedere che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2)$$

✓

Ese: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

PB: $n=0$ $\quad \sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$

$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2$, $\quad \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$ ✓

PI: suppongo $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

devo vedere $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+6n+6\right) = \boxed{\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}}$$

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6$$
$$= 2n^2+7n+6$$ ✓

Ese: calcolare $\sum_{k=0}^{n} \alpha^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$ senza usare ...

Sol: $\sum_{k=0}^{n} \alpha^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$

$$= \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1}}_{0} + \alpha^{n+1}\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha^k\right)$$

Sostituisco $k+1$ con h

cioè $h = k+1$ che varia tra

$h = 0+1 = 1$

e $h = (n-1)+1 = n$

$$= \cancel{\boxed{\left(\sum_{h=1}^{n} \alpha^h\right)}} + \alpha^{n+1} - 1 - \cancel{\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k\right)}}$$

$$= \alpha^{n+1} - 1.$$

Ese: se $\boxed{n^2 + m^2 = k^2}$ $n, m, k \in \mathbb{N}$ almeno uno tra n e m è pari

3, 4, 5 5, 12, 13 7, 24, 25

Sol: per assurdo suppongo $n = 2a+1$

$m = 2b+1$

$$\boxed{n^2 + m^2} = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 = 4(a^2+b^2+a+b) + 2$$

$\Rightarrow (n^2 + m^2) : 4$ ha resto 2

$k \to 2c$ $k^2 = 4c^2 \Rightarrow k^2 : 4$ ha resto 0

$k \to 2c+1$ $k^2 = 4(c^2+c)+1 \Rightarrow k^2 : 4$ ha resto 1

Assurdo.

Chiamo funzione $f: \overset{\text{dominio}}{X} \to \overset{\text{codominio}}{Y}$ un oggetto dove

- X e Y sono insiemi
- f associa a ogni elemento x di X un elemento $f(x)$ di Y

valore di f nel punto x

— o —

Esempi:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n) = 7n^2 + 5n + 3$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $\quad f(n) = \dfrac{7n+8}{5n+2}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt{x^4+7}$

— o —

Dell'oggetto funzione fanno parte non solo le formule per calcolare $f(x)$ ma anche X e Y.

La funzione $\cancel{f(x) = x^2 - 3x + 7}$

- La funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ data da $f(x) = x^2 - 3x + 7$

$\neq$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ ~~data da~~ $\cancel{f(x) = x^2 - 3x + 7}$

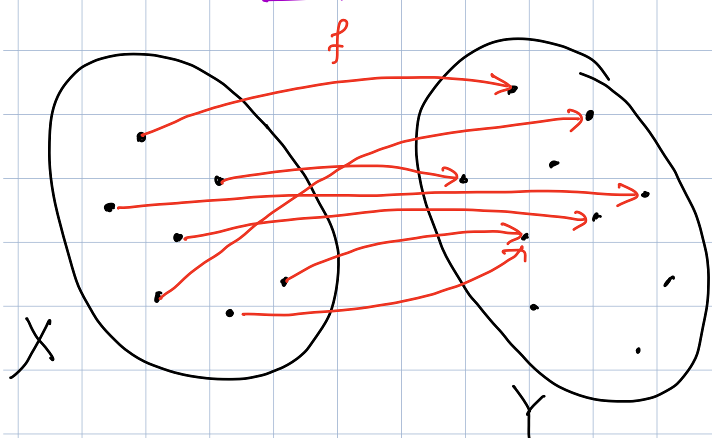
• La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x^2-3x+7$

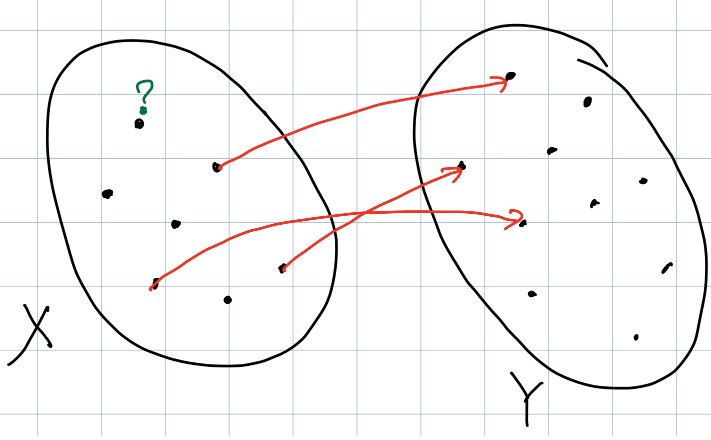
Simbologia : $f: X \to Y$

$x \longmapsto f(x)$

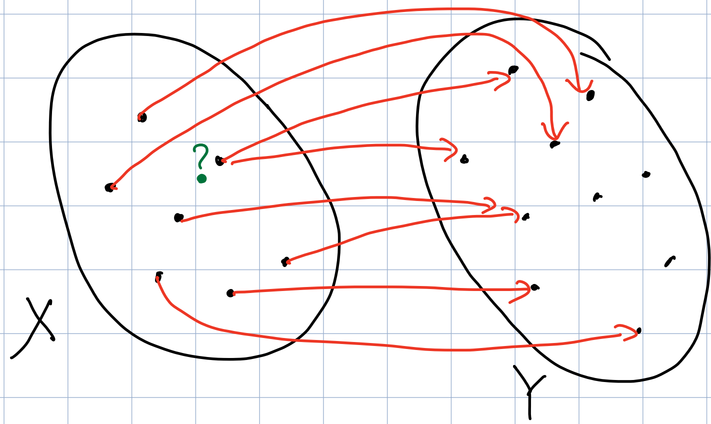
$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, \quad n \longmapsto n^2+2n+3 \quad = \quad f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N} \text{ data da } f(n)=n^2+2n+3$$

Oss : $n^2+2n+3=(n+1)^2+2\geq 0$

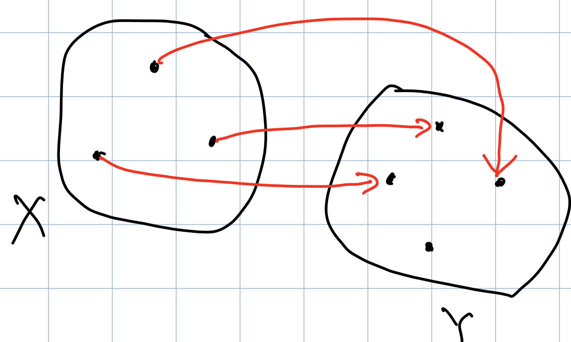


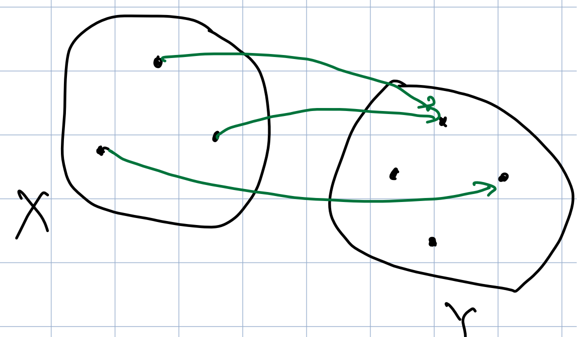


NO



No





Sì

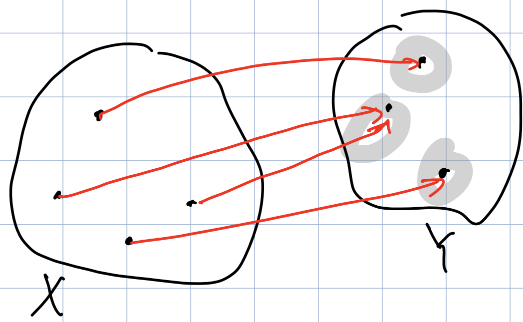
No

$f: X \to Y$ si dice <u>iniettiva</u> se (def. equiv.)

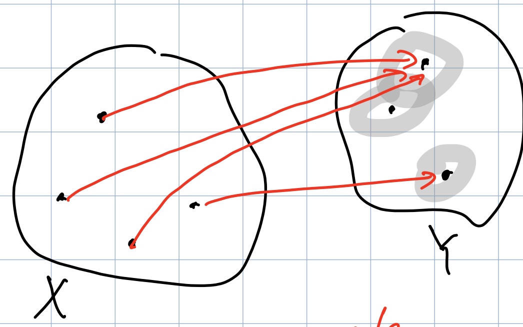
- dati $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in X$ con $f(x_1) = f(x_2)$ si ha per forza $x_1 = x_2$
- se ogni $y \in Y$ è immagine di al più un $x \in X$.

$f: X \to Y$ è surgettiva se

- $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
- cioè tutti gli el. di Y sono valori di f.
- ogni $y \in Y$ è immagine di almeno un $x \in X$.



Sì



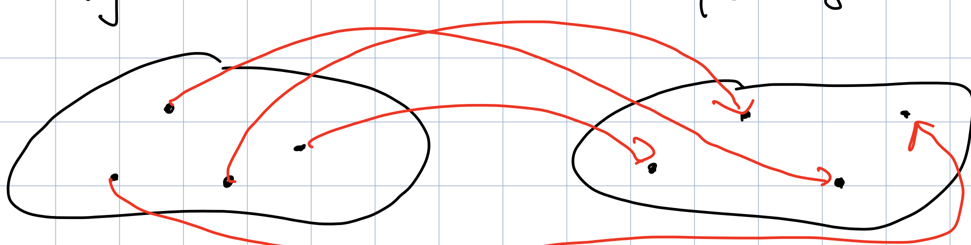
No

Se $f(x)=y$ diciamo che x è una preimmagine di y.

$f(x)=x^2$

		INIETTIVA	SURGETTIVA
• $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$	$f(x)=x^2$	Sì	No
• $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$	$f(x)=x^2$	No	No
• $f:\mathbb{R}\to\{t\in\mathbb{R}: t\geq 0\}$	$f(x)=x^2$	No	Sì
• $f:\{t\in\mathbb{R}: t\geq 0\}\to\{t\in\mathbb{R}: t\geq 0\}$	$f(x)=x^2$	Sì	Sì

$f: X\to Y$ è bigettiva se è iniettiva e surgettiva, cioè $\forall y\in Y$ $\exists$ unico $x\in X$ t.c. $f(x)=y$.



Ese: trovare $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bigettiva.

Es: • $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) =$ numero di lettere con cui si scrive n in italiano

$f(0) = 4$ $0 =$ z e r o
$f(1) = 3$
$f(2) = 3$
$f(100) = 5$ $100 =$ c e n t o

• $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) =$ resto della divisione $n : 7$

$f(19) = 5$

• $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(0) = 1$
$f(1) = 17$
$f(2) = 44$
$f(n) = n - 3 \quad \forall n \geq 3$

E' ben def.

Consegenza: $0, 1, 4, 9, 16, ?$

Composizione: date $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$
chiamo composizione $g \circ f$ la funzione $X \to Z$

data da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

<u>Es</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 2x$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2$$