Ist. Mat. I - CIA
20/9/23

Carlo Petronio + Lorenzo Venturello
www → personale → didattica

——— ∘ ———

Tutto su Teams

——— ∘ ———

Fogli esercizi : PROVATE A FARLI

——— ∘ ———

Esame : P1 + P2 scritte + orale
(www : testi anno scorso)

——— ∘ ———

www : annuncio prossime lezioni
ricevimenti CP + LV + dottorando

——— ∘ ———

Insieme X = collezione di oggetti
se x è uno di essi scrivo $x \in X$ (o $X \ni x$)

"appartiene"

$X = \{$ i capoluoghi di provincia italiani $\}$

Ancona $\in X$; Parigi $\notin X$ $/$ = "non"

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ numeri naturali

- no ordine $\{4, 17, \text{gatto}, \text{Ugo}\}$
  $= \{\text{gatto}, 4, \text{Ugo}, 17\}$

- no ripetizioni $\{1, 5, 17, 3\}$
  $= \{1, 1, 5, 17, 5, 5, 3, 17\}$

Diciamo $Y \subseteq X$ Y sottoinsieme di X

contenuto

se $\forall y \in Y$ si ha che $y \in X$

per ogni

Esempio: {residenti di Lucca} $\subseteq$ {residenti in Toscana}
{residenti a Lucca} $\not\subseteq$ {cittadini italiani}

$\subseteq$: contenuto o uguale

$\{1, 3, 17\} \subseteq \{1, 3, 4, 17, 72\}$
$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

$\subsetneq$ contenuto no uguale

Un sottoinsieme di X può essere definito tramite una proprietà:

$$X = \{\text{noi qui oggi in aula 21 DCCI}\}$$

$$Y = \{x \in X : x \text{ ha almeno 39 di scarpe oggi addosso}\}$$

Carlo $\in Y$ Elisa $\notin Y$

$$\underbrace{Y = \{x \in X}_{Y \text{ è l'insieme degli } x \in X} \ \underbrace{:}_{\text{tale che}} \ x \text{ ha almeno 39 di scarpe oggi addosso}\}$$

$Y \subseteq X$ se $\forall y \in Y$ si ha $y \in X$

per ogni

$Y \not\subseteq X$ se $\exists y \in Y$ t.c. $y \notin X$

esiste

$\emptyset$ insieme vuoto : senza nessun elemento

<u>Oss</u>: $\emptyset \subseteq X$ $\forall X$ insieme

X insieme

$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X.

Esempi

- $X = \emptyset$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$

  $0 \qquad 1$

- $X = \{a\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$

  $1 \qquad 2$

- $X = \{a, b\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

  $2 \qquad \cancel{3}\ 4$

- $X = \{a, b, c\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

  $3 \qquad 8$

  $4 \qquad 16$

  $n \qquad 2^n$

Esercizio: dimostrare che se X ha n elementi allora $\mathcal{P}(X)$ ne ha 2^n.

———— • ————

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ = naturali

$\mathbb{Z}$ = interi relativi $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali

$$\mathbb{Q} \cancel{=} \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \right\}$$

$$\frac{14}{-21} \stackrel{?}{=} \frac{-10}{15} \qquad \underline{\underline{\text{No}}} \qquad \begin{array}{l} 14 \cdot 15 = 210 \\ (-21) \cdot (-10) = 210 \end{array}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, \ m \neq 0 \ ; \text{ convenendo che } \frac{n}{m} = \frac{p}{q} \text{ se } n \cdot q = p \cdot m \right\}$$

Su $\mathbb{Z}$ ci sono due operazioni binarie interne:

somma $\quad n+m \qquad 7+(-11)=-4$

prodotto $\quad n \cdot m = n \times m \qquad 19\cdot(-3) = -57$

——— o ———

Sommatoria $\quad \sum$

$$\sum_{k=0}^{n} (\text{quantità che dipende da } k)$$

sommatoria per k che va da 0 a n di ...

Esempi: $\quad \alpha \in \mathbb{Q}, \ \alpha \neq 0; \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \underbrace{\alpha^0}_{=1} + \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$

$$\sum_{k=-3}^{5} (2k+1) = (-5)+(-3)+(-1)+(1)+(3)+(5)+\dots+(11)$$

Spoiler: $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\dots+\alpha^{1733}+\dots$

risultato può essere un numero o no (non esiste)

——— o ———

Do per buone le proprietà delle operaz. su $\mathbb{Q}$:

- $+, \cdot$ sono commutativi e associativi
- 0 è el. neutro di $+$ e ogni numero ha opposto
- 1 è el. neutro di $\cdot$ e ogni numero $\neq 0$ ha inverso

- distributiva $x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z)$

<u>Proposizione</u>: se $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0,1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha - 1}$.
se $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\alpha = 1 : \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1\right)$$

<u>Dimostrazione</u>: osservo che è la stessa cosa di

$$(\alpha-1)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\right) = \alpha^{n+1} - 1$$

Calcolo membro sinistro:

$$\alpha\cdot\sum_{k=0}^{n}\alpha^k - \sum_{k=0}^{n}\alpha^k = \sum_{k=0}^{n}\alpha^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\alpha^k$$

$$= (\cancel{\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \alpha^3 + \dots + \cancel{\alpha^n} + \alpha^{n+1})$$
$$- (1 + \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \dots + \cancel{\alpha^n}) = \alpha^{n+1} - 1 \quad \blacksquare$$

<u>Ese</u>: riscrivere ultimo passaggio senza usare puntini, solo Σ

—— o ——

Divisione euclidea tra interi (divisione con resto):

Chiamo divisione euclidea $n : m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$
la scrittura $n = m\cdot q + r$ se $0 \leq r < m$

dividendo (n), divisore (m), quoziente (q), resto (r)

$17 : 5 \qquad q = 3 \qquad r = 2$

$$\underset{\text{divid}}{17} = \underset{\text{divis}}{5} \cdot \underset{\text{quoz}}{3} + \underset{\text{resto}}{2} \qquad 0 \le 2 < 5$$

$\cancel{17 : 5 \quad q = 2 \quad r = 7}$

$\cancel{17 = 5 \cdot 2 + 7}$

<u>Teorema</u>: quoziente e resto esistono sempre e sono unici.

Esistenza: non facilissima.

Unicità: devo vedere che (ammesso che esistano) i numeri q, r t.c. $n = m \cdot q + r$, $0 \le r < m$ sono unici.

Se ho due coppie q_1, r_1 e q_2, r_2 che soddisfano la proprietà, devo saper concludere che $q_2 = q_1$ e $r_2 = r_1$:

$$n = m \cdot q_1 + r_1 \qquad 0 \le r_1 < m$$
$$n = m \cdot q_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < m.$$

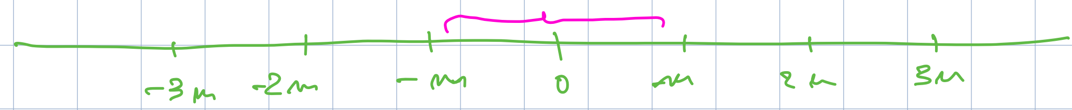
Sottraggo le due a sinistra:

$$0 = m \cdot (q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$
$$\underbrace{r_2 - r_1}_{} = \underbrace{m \cdot (q_1 - q_2)}_{\text{multiplo di } m}$$

differenza tra due numeri compresi tra 0 incluso e m escluso

$\Rightarrow$ compresa tra $-(m-1)$ incluso e $m-1$

Cioè comunque tra $-m$ escluso e m escluso.



Dunque $r_2 - r_1 = 0$

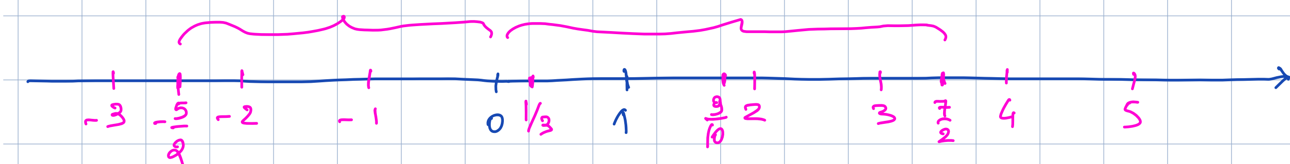
$\cancel{m} \cdot (q_1 - q_2) = 0$

pertanto $r_2 = r_1$, $q_2 = q_1$. ∎

Visto $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ reali

Due costruzioni:

(I) Considero una retta e su di essa due punti distinti che etichetto con 0 e 1.

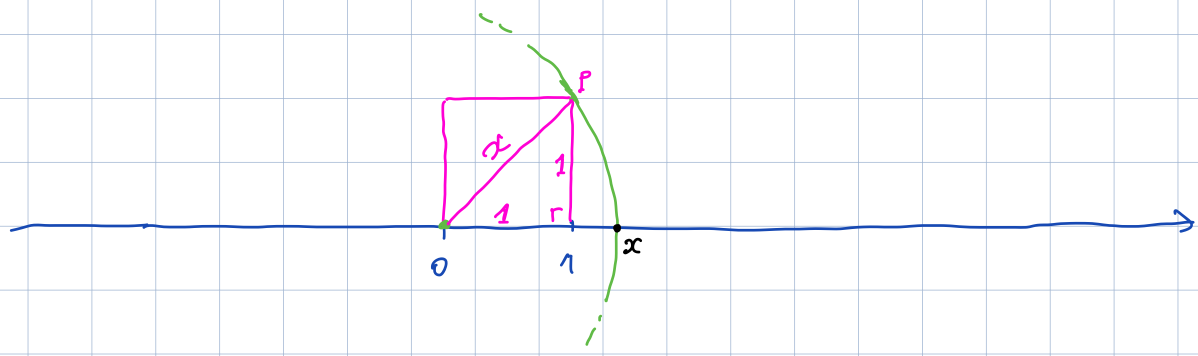


Fatto: usando la proporzionalità delle lunghezze dei segmenti identifico ogni numero razionale con un punto della retta.

Def: $\mathbb{R}$ = tutti i punti della retta.

* Le operazioni di $\mathbb{Q}$ si estendono a $\mathbb{R}$ con le stesse proprietà

* Non tutti i numeri reali sono razionali.



$$x^2 = 1^2 + 1^2 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 = 2$$

Prop: non c'è nessun numero razionale x t.c. $x^2 = 2$.

Dunque tale $x \in \mathbb{R}$ non è in $\mathbb{Q}$; lo chiamo $\sqrt{2}$.

Prop. dice: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

II Notazione posizionale in base 10 per la scrittura dei naturali

$$\begin{aligned} 4573 &= 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1^0 \end{aligned}$$

Scrittura decimale (di ...)

- intera $\quad 4573$
- decimale finito $\quad 4573.12$

$$= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

- decimale periodico $\quad 4573.\overline{128}$

$$= 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$$
$$+ 2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5}$$
$$+ 2 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-7} + \dots$$

a questa sommatoria anche se infinito si può dare significato.